

# 1. gyakorlat

## Egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 5.

## 1. feladat (a)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$  egyenletet.

## 1. feladat (a)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$  egyenletet.

A gyökvonás miatt  $4x + 13 \geq 0$ , azaz  $x \geq -\frac{13}{4}$ .

Az egyenletet négyzetre emelve esetleg újabb gyököket kaphatunk:

$$(x + 2)^2 = 4x + 13$$

$$x^2 + 4x + 4 = 4x + 13$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy az  $x = 3$  megoldás, az  $x = -3$  nem megoldás.

## 1. feladat (b)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left| \frac{3x + 2}{x - 1} \right| = 3$  egyenletet.

## 1. feladat (b)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left| \frac{3x+2}{x-1} \right| = 3$  egyenletet.

Kikötjük, hogy  $x-1 \neq 0$ , azaz  $x \neq 1$ . Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám  $-3$  vagy  $+3$ . Tehát két eset van.

Az első:

$$\frac{3x+2}{x-1} = -3$$

$$3x+2 = -3(x-1)$$

$$3x+2 = -3x+3$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

A másik eset:

$$\frac{3x+2}{x-1} = 3$$

$$3x+2 = 3(x-1)$$

$$3x+2 = 3x-3$$

$$2 = -3,$$

ami ellentmondás, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Tehát az egyetlen megoldás az  $x = \frac{1}{6}$  (ami nem 1).

## 2. feladat (a)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3$  egyenlőtlenséget.

## 2. feladat (a)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3$  egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám  $-3$  és  $3$  között van:

$$-3 \leq \frac{x}{2} + 2 \leq 3$$

$$-5 \leq \frac{x}{2} \leq 1$$

$$-10 \leq x \leq 2$$

Tehát  $x \in [-10, 2]$  a megoldás.

## 2. feladat (b)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $|5 - x| > 3$  egyenlőtlenséget.



## 2. feladat (b)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $|5 - x| > 3$  egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor nagyobb 3-nál, ha nagyobb 3-nál, vagy kisebb  $-3$ -nál.

$$5 - x > 3$$

$$5 > 3 + x$$

$$2 > x$$

$$5 - x < -3$$

$$5 < -3 + x$$

$$8 < x$$

Tehát  $x \in (-\infty, 2) \cup (8, +\infty)$  a megoldás.

## 2. feladat (c)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left|7 - \frac{x+3}{2}\right| \geq 5$  egyenlőtlenséget.

## 2. feladat (c)

Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en az  $\left|7 - \frac{x+3}{2}\right| \geq 5$  egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legalább 5, ha legalább 5, vagy legfeljebb  $-5$ .

$$7 - \frac{x+3}{2} \geq 5$$

$$14 - (x+3) \geq 10$$

$$11 - x \geq 10$$

$$1 \geq x$$

$$7 - \frac{x+3}{2} \leq -5$$

$$14 - (x+3) \leq -10$$

$$11 - x \leq -10$$

$$21 \leq x$$

Tehát  $x \in (-\infty, 1] \cup [21, +\infty)$  a megoldás.

### 3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  függvényt.

### 3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  függvényt.

Teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1$$

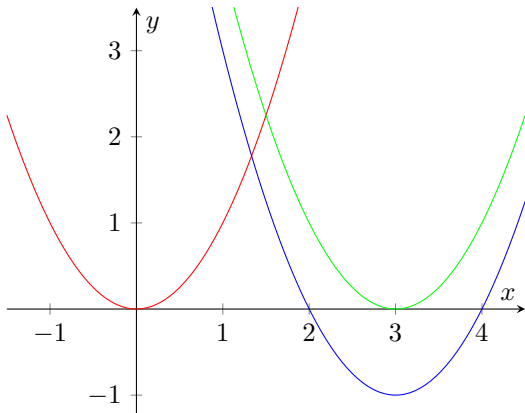
### 3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  függvényt.

Teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1$$

Tehát az  $y = x^2$  grafikonját 3 egységgel jobbra, és 1 egységgel lefelé kell mozgatnunk.



## 4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 5)$  és  $C(1, 3)$  csúcspontú háromszög belseje.

## 4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az  $A(0,0)$ ,  $B(0,5)$  és  $C(1,3)$  csúcspontú háromszög belseje.

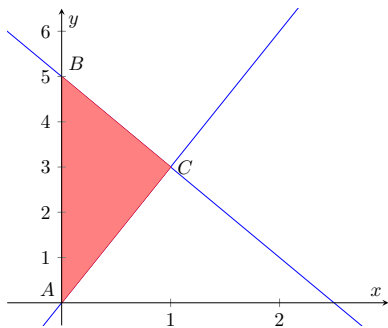
$AB$  oldalegyenes egyenlete  $x = 0$ ,  
ettől jobbra levő pontok:  $x > 0$ .

$AC$  oldalegyenes meredéksége  
 $\frac{3}{1} = 3$ , így az egyenlete  $y = 3x + 0$   
(átmegy az origón).

A háromszög belseje ezen egyenes  
felett van, így a megfelelő  
egyenlőtlenség:  $y > 3x$ .

A  $BC$  oldalegyenes meredéksége  
 $\frac{-2}{1} = -2$ , így az egyenlete  
 $y = -2x + 5$ , mert az  $y$ -tengelyt az  
5-nél metszi.

A háromszög belseje ezen egyenes  
alatt van, így a megfelelő  
egyenlőtlenség:  $y < -2x + 5$ .



A háromszög belsejét meghatározó  
egyenlőtlenség-rendszer:

$$x > 0$$

$$y > 3x$$

$$y < -2x + 5$$



## 5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy  $A \subset C$ ,  $A \neq C$ ,  $B \subset C$ ,  $B \neq C$ ,  $A \not\subset B$  és  $B \not\subset A$ .

## 5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy  $A \subset C$ ,  $A \neq C$ ,  $B \subset C$ ,  $B \neq C$ ,  $A \not\subset B$  és  $B \not\subset A$ .

$A \subset C$  azt jelenti, hogy  $A$  minden eleme benne van a  $C$  halmazban.

Mivel  $1^2, 2^2, 10^2$  mind legalább 1, így ez teljesül.

$A \neq C$ -hez elegendő egy olyan elemet mutatni, mely az egyikben benne van, de a másikban nincs. Ilyen például a 3, mely a  $C$ -ben benne van, de az  $A$ -ban nem.

$B \subset C$ -hez azt kell meggondolni, hogy ha  $x > 1$ , akkor  $x^2 \geq 1$  is teljesül, ami nyilvánvaló.

$B \neq C$  igaz, mert  $(-1) \in C$ , de  $(-1) \notin B$ .

$A \not\subset B$ , hiszen  $1 \in A$ , de  $1 \notin B$ .

$B \not\subset A$ , mert  $3 \in B$ , de  $3 \notin A$ .

## Opcionális feladat

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = ?$$

# Házi feladatok

1. Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en a  $x - 3 = \sqrt{x + 9}$  egyenletet.
2. Oldjuk meg  $\mathbb{R}$ -en a  $\left| \frac{1-x}{3} - 5 \right| > 7$  egyenlőtlenséget.

## Házi feladatok végeredménye

1.  $x = 7$  ( $x = 0$  hamis gyök)
2.  $(-\infty, -35) \cup (7, +\infty)$