

# 2. gyakorlat

## Polinomok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2024. szeptember 12.

## 1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az  $x^2 + 7x + 10$  kifejezést.

## 1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az  $x^2 + 7x + 10$  kifejezést.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével a polinom két gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} -2 \\ -5 \end{array}$$

## 1. feladat (a)

Alakítsuk szorzattá az  $x^2 + 7x + 10$  kifejezést.

A másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével a polinom két gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} -2 \\ -5 \end{array}$$

Így a polinom gyöktényező alakja:

$$x^2 + 7x + 10 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - (-2))(x - (-5)) = (x + 2)(x + 5)$$

## 1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a  $-2x^2 + 7x - 3$  kifejezést.

## 1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a  $-2x^2 + 7x - 3$  kifejezést.

Ebben az esetben a két gyök:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4} = \frac{1}{3}$$

## 1. feladat (b)

Alakítsuk szorzattá a  $-2x^2 + 7x - 3$  kifejezést.

Ebben az esetben a két gyök:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4} = \frac{1}{2} \text{ vagy } \frac{2}{3}$$

Így a szorzatalak (figyelembe véve, hogy a főegyüttható  $-2$ ):

$$-2x^2 + 7x - 3 = -2 \left( x - \frac{1}{2} \right) (x - 3) = (1 - 2x)(x - 3)$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.



## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)($$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \\ + 6x^3 - x^2 \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \\ \phantom{2x^4} + 6x^3 - x^2 \\ \phantom{2x^4} + \underline{6x^3 - 18x^2} \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \\ + 6x^3 - x^2 \\ + 6x^3 - 18x^2 \\ \hline + 17x^2 - 5x \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \phantom{- x^2 - 5x + 6} \\ \phantom{2x^4} + 6x^3 - x^2 \phantom{- 5x + 6} \\ \phantom{2x^4} + 6x^3 - 18x^2 \phantom{- 5x + 6} \\ \phantom{2x^4} \phantom{+ 6x^3} \underline{+ 17x^2 - 5x + 6} \\ \phantom{2x^4} \phantom{+ 6x^3} \phantom{+ 17x^2} \underline{+ 17x^2 - 51x} \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 0x^3 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) \\ \underline{2x^4 - 6x^3} \\ \phantom{2x^4} + 6x^3 - x^2 \\ \phantom{2x^4} + \underline{6x^3 - 18x^2} \\ \phantom{2x^4} \phantom{6x^3} + 17x^2 - 5x \\ \phantom{2x^4} \phantom{6x^3} + \underline{17x^2 - 51x} \\ \phantom{2x^4} \phantom{6x^3} \phantom{17x^2} + 46x + 6 \end{array}$$

## 2. feladat

Végezzük el a  $(2x^4 - x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x)$  polinomosztást.

Bár nem szerepel  $x^3$ -ös tag, azért be kell írunk  $0x^3$ -öt:

$$\begin{array}{r r r r r r r l} 2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & = & (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) & + \\ 2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & & & & + & 46x + 6 \\ \hline & & + & 6x^3 & - & x^2 & & & & & & & \\ & & + & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & & & & \\ & & & & + & \hline & & & & + & 17x^2 & - & 5x & & & & & \\ & & & & + & 17x^2 & - & 51x & & & & & \\ & & & & & + & \hline & & & & & + & 46x & + & 6 & & & & \end{array}$$

Tehát:

$$2x^4 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) + 46x + 6.$$



### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímelek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímelek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.



### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$ , tehát a  $-5$  gyök.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímekek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$ , tehát a  $-5$  gyök.

$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$ , tehát a 25 nem gyök.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$ , tehát a  $-5$  gyök.

$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$ , tehát a 25 nem gyök.

$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$ , tehát a  $-25$  nem gyök.

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$ , tehát a  $-5$  gyök.

$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$ , tehát a 25 nem gyök.

$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$ , tehát a  $-25$  nem gyök.

Így a polinom egész gyökei az 1, 5,  $-5$ .

### 3. feladat

Keressük meg az  $x^3 - x^2 - 25x + 25$  polinom egész gyökeit.

Előadáson szerepelt a következő tétel:

Az  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  egész együtthatós polinom  $\frac{p}{q}$  racionális gyökeire ( $p, q$  egészek és relatív prímek) teljesül, hogy  $p$  osztja  $a_0$ -t és  $q$  osztja  $a_n$ -et.

Esetünkben  $a_n = 1$  és  $a_0 = 25$ .

Tudjuk, hogy  $q$  osztja  $a_n = 1$ -et, azaz  $q = \pm 1$ , feltehetjük, hogy  $q = 1$ .

Azt is tudjuk, hogy  $p$  osztja  $a_0 = 25$ -öt, így  $p$  lehetséges értékei:

$\pm 1, \pm 5, \pm 25$ .

Ezeket behelyettesítjük, és megnézzük, hogy 0-t kapunk-e:

$1^3 - 1^2 - 25 \cdot 1 + 25 = 0$ , tehát az 1 gyök.

$(-1)^3 - (-1)^2 - 25 \cdot (-1) + 25 = 48$ , tehát a  $-1$  nem gyök.

$5^3 - 5^2 - 25 \cdot 5 + 25 = 0$ , tehát az 5 gyök.

$(-5)^3 - (-5)^2 - 25 \cdot (-5) + 25 = 0$ , tehát a  $-5$  gyök.

$25^3 - 25^2 - 25 \cdot 25 + 25 = 14400$ , tehát a 25 nem gyök.

$(-25)^3 - (-25)^2 - 25 \cdot (-25) + 25 = -15600$ , tehát a  $-25$  nem gyök.

Így a polinom egész gyökei az 1, 5,  $-5$ . Mivel egy harmadfokú polinomnak legfeljebb 3 darab gyöke lehet, így miután találtunk hármat, már nem is kellett volna ellenőrizni, hogy a  $\pm 25$  gyök-e.

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.



## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)($$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 \\ \hline x^4 - x^3 \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \\ \underline{- 5x^3 + 5x^2} \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 \\ \hline x^4 - x^3 \\ \hline - 5x^3 + 10x^2 \\ - 5x^3 + 5x^2 \\ \hline + 5x^2 - 2x \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 5x \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \\ \underline{- 5x^3 + 5x^2} \\ + 5x^2 - 2x \\ \underline{+ 5x^2 - 5x} \end{array}$$



## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 5x \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \\ \underline{- 5x^3 + 5x^2} \\ + 5x^2 - 2x \\ + 5x^2 - 5x \\ \underline{\phantom{+} 3x - 3} \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \\ \underline{- 5x^3 + 5x^2} \\ + 5x^2 - 2x \\ + 5x^2 - 5x \\ \underline{\phantom{+} + 3x - 3} \\ + 3x - 3 \end{array}$$

## 4. feladat

Határozzuk meg az  $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$  polinom valamennyi valós gyökét.

Először megpróbálunk racionális gyököt keresni.

Az 1 főegyüttható miatt ezek a  $-3$  osztói lehetnek:  $\pm 1, \pm 3$ .

Az 1-et behelyettesítve 0-t kapunk, tehát  $x_1 = 1$  gyök.

Ekkor az  $x - 1$  tagot kiemeljük polinomosztással:

$$\begin{array}{r} x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 5x + 3) \\ \underline{x^4 - x^3} \\ - 5x^3 + 10x^2 \\ \underline{- 5x^3 + 5x^2} \\ + 5x^2 - 2x \\ + 5x^2 - 5x \\ \underline{\phantom{+} + 3x - 3} \\ + 3x - 3 \\ \underline{\phantom{+} + 3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

Maradék nincsen, mert az 1 gyök.

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább.

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább.  
Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk.

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)($$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \end{array}$$



## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \end{array}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline \end{array}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \end{array}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \\ - x + 3 \\ \hline \end{array}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \\ - x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \\ - x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Végül az  $x^2 - 2x - 1$  másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \\ - x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Végül az  $x^2 - 2x - 1$  másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

## 4. feladat – folytatás

Ekkor a kapott  $x^3 - 5x^2 + 5x + 3$  polinom gyökeit keressük tovább. Ennek a racionális gyökei a  $\pm 1, \pm 3$  lehetnek, ezekkel próbálkozunk. Így azt kapjuk, hogy az  $x_2 = 3$  gyök, melyet kifelhetünk:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 5x + 3 = (x - 3)(x^2 - 2x - 1) \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline - 2x^2 + 5x \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline - x + 3 \\ - x + 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Végül az  $x^2 - 2x - 1$  másodfokú polinom gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletével határozhatjuk meg:

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Tehát a negyedokú polinom (valós) gyökei:  $1, 3, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$ .



## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezői alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)($$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3$$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2$$



## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x - 1)$$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei szintén a  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei szintén a  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

Az  $x_2 = -1$  is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)($$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei szintén a  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

Az  $x_2 = -1$  is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x^2$$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei szintén a  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

Az  $x_2 = -1$  is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x^2 + 4x$$

## 5. feladat

A  $c$  valós szám mely értékére lesz az  $x_1 = 1$  szám gyöke a  $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinomnak? Határozzuk meg az így adódó polinom valós gyökeit, és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

A polinomba  $x = 1$ -et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$ , tehát  $c = 4$  esetén gyök az 1.

A  $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$  polinom lehetséges racionális gyökei ( $p$  osztja 1-et és  $q$  osztja 4-et):  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$ .

Az  $x_1 = 1$  gyök, így azt kiemelhetjük polinomosztással:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x - 1)(4x^3 + 8x^2 + 5x + 1)$$

Az így kapott  $4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$  polinom racionális gyökei szintén a  $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$  lehetnek, így ezekkel próbálkozunk.

Az  $x_2 = -1$  is gyök, így azt is kiemeljük:

$$4x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x + 1)(4x^2 + 4x + 1)$$



## 5. feladat – folytatás

A  $4x^2 + 4x + 1$  másodfokú polinomra a megoldóképlet:

## 5. feladat – folytatás

A  $4x^2 + 4x + 1$  másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

## 5. feladat – folytatás

A  $4x^2 + 4x + 1$  másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a  $-\frac{1}{2}$  kétszeres gyöke (azaz  $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ ).

## 5. feladat – folytatás

A  $4x^2 + 4x + 1$  másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a  $-\frac{1}{2}$  kétszeres gyöke (azaz  $4x^2 + 4x + 1 = 4(x + \frac{1}{2})^2$ ).

Tehát az eredeti negyedfokú polinom gyökei:  $1, -1, -\frac{1}{2}$ , legutóbbi kétszeres.

## 5. feladat – folytatás

A  $4x^2 + 4x + 1$  másodfokú polinomra a megoldóképlet:

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2},$$

azaz a  $-\frac{1}{2}$  kétszeres gyöke (azaz  $4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ ).

Tehát az eredeti negyedfokú polinom gyökei:  $1, -1, -\frac{1}{2}$ , legutóbbi kétszeres.

Így a gyöktényező felbontás:

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 4(x - 1)(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

ahol a legutolsó tag azért van négyzeten, mert a hozzá tartozó  $-\frac{1}{2}$  gyök kétszeres.

# Házi feladat

Keressük meg az alábbi polinomok valós gyökeit.

(a)  $x^4 - 6x^2 + x + 6$ ,

(b)  $x^4 - 6x^3 + 27x - 10$ .

## Házi feladat megoldása

$$(a) -1, 2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$(b) -2, 5, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$