6. gyakorlat

Differenciálszámítás folytatás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 17.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

1. feladat (a)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $(3x^2 + 4x + 1)^5$ függvény deriváltját.

Az $f \circ g$ függvénykompozíció deriváltja: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Ezt nevezik láncszabálynak is.

A belső függvény a polinom, a külső függvény az ötödik hatvány, így

$$\left((3x^2 + 4x + 1)^5\right)' = 5 \cdot (3x^2 + 4x + 1)^4 \cdot (6x + 4).$$

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2+1}$ függvény deriváltját.

1. feladat (b)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\sqrt{x^2+1}$ függvény deriváltját.

A külső függvény a négyzetgyökvonás, azaz $\frac{1}{2}$-edik hatvány, míg a belső az x^2+1:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

De használhatjuk közvetlenül, hogy $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

1. feladat (c)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az e^{x^4} függvény deriváltját.

Ebben az esetben az exponenciális függvény a külső, a negyedik hatvány a belső függvény:

$$\left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot 4x^3.$$

1. feladat (d)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg}\left((x^2+x)^3\right)$ függvény deriváltját.

1. feladat (d)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)$ függvény deriváltját.

Ez már többszörösen összetett függvény, először csak a tangensben levő függvény deriváltját számoljuk ki:

$$\left(\left(x^2+x\right)^3\right)' = 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1),$$

ami alapján az eredeti függvény deriváltja

$$\left(\operatorname{tg}\left(\left(x^2+x\right)^3\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\left(x^2+x\right)^3\right)} \cdot 3\left(x^2+x\right)^2 \cdot (2x+1).$$

1. feladat (e)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos\left(e^{2x+3}\right)$ függvény deriváltját.

1. feladat (e)

Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki a $\cos\left(e^{2x+3}\right)$ függvény deriváltját.

Ez is többszörösen összetett függvény:

$$\left(\cos\left(e^{2x+3}\right)\right)' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot e^{2x+3} \cdot 2$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\dfrac{x^3+2}{x-2}$ függvény deriváltját.

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\dfrac{x^3+2}{x-2}$ függvény deriváltját.

Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki az $\dfrac{x^3+2}{x-2}$ függvény deriváltját.

Ez egy tört, így a hányados deriválási szabályát használjuk:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{x^3+2}{x-2}\right)' = \frac{(x^3+2)'(x-2) - (x^3+2)(x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{3x^2(x-2) - (x^3+2)}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x-2)^2}$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így itt a Leibniz-szabályt használjuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(e^x)' = e^x$ és $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

2. feladat (b)

Számítsuk ki az $e^x \operatorname{ch} x$ függvény deriváltját.

Ez egy szorzat, így itt a Leibniz-szabályt használjuk:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Továbbá még azt is felhasználjuk, hogy $(e^x)' = e^x$ és $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$$(e^x \operatorname{ch} x)' = (e^x)' \operatorname{ch} x + e^x (\operatorname{ch} x)' = e^x \operatorname{ch} x + e^x \operatorname{sh} x = e^x (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) =$$
$$= e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = e^x \frac{2e^x}{2} = e^x e^x = e^{2x}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha már az elején beszorzunk:

$$e^x \operatorname{ch} x = e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x e^x + e^x e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2},$$

melynek deriváltja:

$$\left(\frac{e^{2x} + 1}{2} \right)' = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \right)' = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 + 0 = e^{2x}$$

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1-2x}$ függvény deriváltját.

Ez egy összetett függvény:

$$\left(\sqrt[3]{1-2x}\right)' = \frac{1}{3}(1-2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}.$$

2. feladat (d)

Számítsuk ki a $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

2. feladat (d)

Számítsuk ki a $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ függvény deriváltját.

Összetett függvény:

$$\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2+x^{-\frac{1}{2}}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

2. feladat (e)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

2. feladat (e)

Számítsuk ki a $\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}$ függvény deriváltját.

Ez is egy összetett függvény, először csak a belső függvényt deriváljuk, melyben egy szorzat is van:

$$\left(1+x\sqrt{x+3}\right)' = 1\cdot\sqrt{x+3} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}},$$

felhasználva, hogy $\left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ (ez is egy összetett függvény). Így az eredeti függvény deriváltja:

$$\left(\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(1+x\sqrt{x+3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}\right).$$

3. feladat (a)

Határozzuk meg a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (a)

Határozzuk meg a $\cos(5x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

Mivel $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, így

$$\cos(5x) \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(5x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{5^{2k}}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-25)^k}{(2k)!} x^{2k} =$$

$$= 1 - \frac{25}{2} x^2 + \frac{625}{24} x^4 - \cdots + \frac{(-25)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Ez a $2n$-edfokú (és $2n+1$-edfokú) Taylor-polinom, ha n-edfokút szeretnénk, akkor k csak $[\frac{n}{2}]$-ig megy:

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-25)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$1 - \frac{25}{2} x^2$$

3. feladat (b)

Határozzuk meg a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (b)

Határozzuk meg a e^{-x^2} függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

Mivel $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, így

$$e^{-x^2} \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$$

Ez a $2n$-edfokú (és $2n+1$-edfokú) Taylor-polinom, ha n-edfokút szeretnénk, akkor k csak $[\frac{n}{2}]$-ig megy:

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$1 - x^2$$

3. feladat (c)

Határozzuk meg a $\dfrac{x}{3+x}$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

3. feladat (c)

Határozzuk meg a $\dfrac{x}{3+x}$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

Itt azt használjuk fel, hogy $\dfrac{1}{1-x} \approx \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

$$\frac{x}{3+x} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)} \approx \frac{x}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{x}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^{k+1} =$$

$$= \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} - \frac{x^4}{81} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^{n+1}$$

Ez az $(n+1)$-edfokú Taylor-polinom, az n-edfokú:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^{k+1} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} - \frac{x^4}{81} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} x^n$$

A harmadfokú Taylor-polinom:

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27}$$

Házi feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.
   (a) $(1+\sqrt[3]{x})^3$,
   (b) $5^x \operatorname{arctg}(x)$,
   (c) $\sqrt[3]{\sin(2x+1)}$,
   (d) $3xe^{3x}$,
   (e) $\dfrac{\operatorname{tg}(5x)}{3-2x}$.
2. Határozzuk meg az $f(x) = x\sin(-2x)$ függvény $x_0 = 0$ körüli harmadfokú és n-edfokú Taylor-polinomját.

Házi feladatok megoldásai

1. (a) $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$,

   (b) $5^x \operatorname{arctg}(x)\ln 5 + \dfrac{5^x}{1+x^2}$,

   (c) $\dfrac{2\cos(2x+1)}{3\sqrt[3]{\sin^2(2x+1)}}$,

   (d) $(9x+3)e^{3x}$,

   (e) $\dfrac{\frac{15-10x}{\cos^2(5x)} + 2\mathrm{tg}\,(5x)}{(3-2x)^2}$.

2. n-edfokú: $\displaystyle\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} \frac{2^{2k+1}(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+2}$, harmadfokú: $-2x^2$.