7. gyakorlat

Monotonitás és szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 24.

1. feladat

Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

1. feladat

Adjuk meg azt a legbővebb intervallumot, amelyen az

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton.

A függvény deriváltja a hányados deriválási szabályával:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (3x^2+1) - x^3 \cdot (6x+0)}{(3x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2} \geq 0,$$

így a függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en.

A függvény deriváltja csak a 0-ban nulla, tehát szigorúan pozitív a $(-\infty, 0)$ és a $(0, +\infty)$ intervallumon, tehát ezen intervallumokon a függvény szigorúan monoton nő. Mivel a függvény folytonos a 0-ban, így ezekből következik, hogy a teljes $\mathbb{R}$-en a függvény szigorúan monoton nő.

2. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2 + x - \ln(1+x) \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

2. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2 + x - \ln(1+x) \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a függvény deriváltja nulla:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x},$$

ami csak a nullában 0. Tehát a 0 az egyetlen lehetséges szélsőértékhely.

A derivált a $(-1, 0)$ intervallumban negatív, így itt monoton csökken.
a $(0, +\infty)$ intervallumban pozitív, így itt monoton nő.
Tehát a 0 lokális minimumhely.
Ezt a második deriváltból is megkaphatjuk:

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)' = -(-1) \cdot (1+x)^{-2} \cdot 1 = \frac{1}{(1+x)^2},$$

ami a 0-ban: $f''(0) = 1 > 0$, azaz itt lokális minimum van.

A lokális minimum értéke: $f(0) = 2 + 0 - \ln(1+0) = 2$.

3. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

3. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ függvény monotonitási intervallumait, valamint lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit.

Először lederiváljuk a függvényt:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 3x^2 = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3).$$

Nullhelyek: 0, és az $x^2 - 4x + 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei: 1 és 3.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	mon. nő			lok. max.	mon. csök.	lok. min.	mon. nő

$x = 0$ nem lokális szélsőértékhely
$x = 1$ lokális maximumhely, a lokális maximum értéke: $f(1) = 2$
$x = 3$ lokális minimumhely, a lokális minimum értéke $f(3) = -26$

A szélsőértékek típusát általában a második deriváltból is leolvashatjuk:

$$f''(x) = \left(5x^4 - 20x^3 + 15x^2\right)' = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$f''(0) = 0$, ebből nem tudjuk megállapitani, hogy van-e lokális szélsőérték
$f''(1) = -10 < 0$, így ez lokális maximumhely
$f''(3) = 90 > 0$, így ez lokális minimumhely

4. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (x \in [-1, 5])$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

4. feladat

Határozzuk meg az

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad (x \in [-1, 5])$$

függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

Abszolút szélsőérték (minimum vagy maximum) lokális szélsőértéknél vagy az intervallum szélein lehet.
Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált 0:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12,$$

ennek a gyökei 1 és -2, de a -2 nincs az értelmezési tartományban.
A második derivált: $f''(x) = 12x + 6$, így $f''(1) = 18 > 0$, azaz az 1 lokális minimumhely, itt a függvény értéke: $f(1) = \underline{-6}$.

Az intervallum szélein: $f(-1) = \underline{14}$ és $f(5) = \underline{266}$.

Abszolút minimum: -6 ($x = 1$ helyen veszi fel).
Abszolút maximum: 266 ($x = 5$ helyen veszi fel).

5. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x} \quad (x \in (0, +\infty))$ függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

5. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x} \quad (x \in (0, +\infty))$ függvény abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

Először a lokális szélsőértékeket határozzuk meg, amihez a függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2},$$

melynek nullhelye: $x^2 = 100$ esetén, azaz $x = \pm 10$.
De csak a $+10$ esik az értelmezési tartományba.
$f''(x) = -(-2)\frac{200}{x^3} = \frac{400}{x^3}$, tehát $f''(10) > 0$, ez lokális minimum.
A lokális minimum értéke: $f(10) = 40$.

Az intervallum szélein határértékeket számolunk:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} 2x + \frac{200}{x} = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \frac{200}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

Az abszolút mininum 40, melyet $x = 10$ esetén vesz fel,
és abszolút maximuma nincs, mert tetszőlegesen nagy értéket felvesz.

6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

A keresetek $(100y)$%-a az összes jövedelem y-szorosa, azaz $10^{13} \cdot y$ Ft. Ennek a $(100y^3)$%-át, azaz y^3-szeresét elcsalják, ami $10^{13} \cdot y \cdot y^3$ Ft, így csak $10^{13}y - 10^{13}y^4$ forint marad. Tehát az

$$f(y) = 10^{13}y - 10^{13}y^4 = 10^{13}(y - y^4)$$

függvény maximumát keressük.

6. feladat

Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)$%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)$%-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

A keresetek $(100y)$%-a az összes jövedelem y-szorosa, azaz $10^{13} \cdot y$ Ft. Ennek a $(100y^3)$%-át, azaz y^3-szeresét elcsalják, ami $10^{13} \cdot y \cdot y^3$ Ft, így csak $10^{13}y - 10^{13}y^4$ forint marad. Tehát az

$$f(y) = 10^{13}y - 10^{13}y^4 = 10^{13}(y - y^4)$$

függvény maximumát keressük.

$f'(y) = 10^{13}(1 - 4y^3)$, melynek nullhelye $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$-ben van.

$f''(y) = 10^{13}(-12y^2)$, melyre $f''\left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) < 0$, tehát ez lokális maximum.

A feladatnak $0 \leq y \leq 1$-ra van értelme, de $f(0) = f(1) = 0$.
Így a függvény maximuma
$y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}630$-ben van ($63{,}0$%-os adókulcs).

Opcionális feladatok

Legyen

$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos x + x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Írjuk fel a függvény derivált függvényét. Ennek felhasználásával mutassuk meg, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a $(0, \frac{\pi}{6})$ intervallumban.

Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0{,}03v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki (óránként). Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak).

Házi feladatok

1. Andri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?
2. Gabi mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha x petákért adja darabját, akkor az előtte elsétálók $(60 - 3x)$ százaléka vesz tőle egyet. Mennyiért adja darabját, hogy a bevétele maximális legyen? (Feltehetjük, hogy 1000 vásárló halad el előtte, de ennek nincs jelentősége.)

Házi feladatok megoldása

1. 9
2. 10