8. gyakorlat

Konvexitás, aszimptoták és L'Hospital-szabály

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. október 31.

1. feladat (a)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

1. feladat (a)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Ha a függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény konvex, ha negatív, akkor konkáv. Ahol a második derivált előjelet vált (és így 0), ott van inflexiós pont.

1. feladat (a)

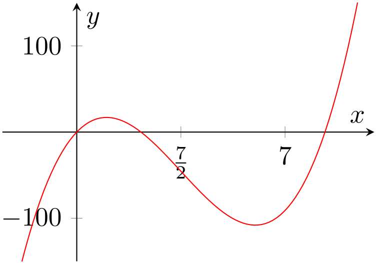
Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Ha a függvény második deriváltja pozitív, akkor a függvény konvex, ha negatív, akkor konkáv. Ahol a második derivált előjelet vált (és így 0), ott van inflexiós pont.

A függvény deriváltjai:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$$
$$f''(x) = 12x - 42$$

A második derivált $x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$ esetén 0, ennél kisebb x-ekre negatív, nagyobbakra pozitív. Így a függvény
a $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ intervallumban konkáv,
a $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ intervallumban konvex,
és
az $x = \frac{7}{2}$ inflexiós pont.



1. feladat (b)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

1. feladat (b)

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Először kiszámítjuk a deriváltakat:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(6x^2 - 6x)(x-1) - (2x^3 - 3x^2) \cdot 2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

1. feladat (b) – folytatás

Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$ függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

Az $x^2 - 3x + 3 = 0$ egyenletnek nincs valós megoldása (mivel a diszkrimáns negatív), így ez a másodfokú polinom mindenütt pozitív (főegyütthható pozitív). Ez alapján:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
f''	$+$	0	$-$	n. é.	$+$
f	konvex	i. p.	konkáv	n. é.	konvex

Tehát a függvény
a $(-\infty, 0)$ intervallumban konvex,
a $(0, 1)$ intervallumban konkáv,
az $(1, +\infty)$ intervallumban megint konvex.
Az $x = 0$ az egyetlen inflexiós pont.

2. feladat

Van-e a függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

Ha a függvénynek a végtelenben véges a határértéke, akkor vízszintes aszimptotája van, míg ha a határérték végtelen, akkor ferde aszimptotája lehet (de nem biztos, hogy van). A ferde aszimptota $y = ax + b$ egyenletében szereplő a és b értékét a következő határértékek segítségvel számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax).$$

Az a értékét a L'Hospital-szabály alapján a derivált határértékeként is megkaphatjuk:

$$a = \lim_{x \to \infty} f'(x)$$

A határértékeket a $-\infty$-ben számolva kapjuk a $-\infty$-ben az aszimptotákat.

2. feladat (a)

Van-e az $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (a)

Van-e az $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{9}{x} = +\infty$$

Ezért ferde aszimptotát keresünk:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+9}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{9}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+9}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x} = 0$$

Így a $+\infty$-ben a ferde aszimptota egyenlete: $y = 1x + 0$, azaz $y = x$. Hasonló számolással kapjuk, hogy ugyanez az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben.

2. feladat (b)

Van-e az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (b)

Van-e az $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 - x^2 - 2x = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

Most is lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - x - 2 =$$
$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

miatt nincs ferde aszimptota a $+\infty$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben sincsen.

2. feladat (c)

Van-e az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (c)

Van-e az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

A függvény határértéke:

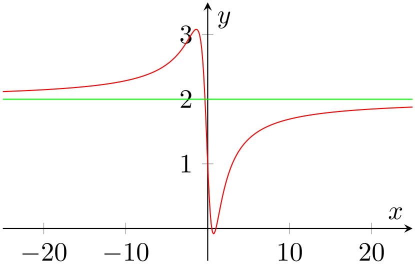
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$$

így ebben az esetben vízszintes aszimptota van, az $y = 2$ egyenes.

Hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2,$$

így a $-\infty$-ben is az $y = 2$ egyenes az aszimptota.



2. feladat (d)

Van-e az $f(x) = 3^{5-2x}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

2. feladat (d)

Van-e az $f(x) = 3^{5-2x}$ függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg.

A függvény határértéke a $+\infty$-ben:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 3^{5-2x} = 0,$$

így a $+\infty$-ben az $y = 0$ vízszintes aszimptota.

A függvény határértéke a $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3^{5-2x} = +\infty,$$

így itt nincs vízszintes aszimptota.

Ferde aszimptotához a derivált határértékét számolhatjuk:

$$a = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 3^{5-2x} \ln 3 \cdot (-2) = -\infty,$$

így ferde aszimptota sincs.

3. feladat (a)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\mathrm{tg}(x-2)}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

3. feladat (a)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)}$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

$$\lim_{x\to 2} \sin(2x-4) = \sin(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 2} \operatorname{tg}(x-2) = \operatorname{tg}(0) = 0$$

Ez egy $\frac{0}{0}$ típusú határérték, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\sin(2x-4))'}{(\operatorname{tg}(x-2))'} = \lim_{x\to 2} \frac{(\cos(2x-4))\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2(x-2)}\cdot 1} = \frac{1\cdot 2}{\frac{1}{1^2}\cdot 1} = 2$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)} = 2.$

3. feladat (b)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x}$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

3. feladat (b)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{3x}$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} 3x = +\infty$$

Ez egy $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határérték, ebben az esetben is alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))'}{(3x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x} = 0,$$

így $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{3x} = 0$.

3. feladat (c)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

3. feladat (c)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x - x) = 0 - 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0} (x - \sin x) = 0 - 0 = 0$$

Így ez $\frac{0}{0}$ típusú határérték, tehát L'Hospital-hatunk:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x}$$

Azonban ez is $\frac{0}{0}$ alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2(\cos x)^{-3}(-\sin x)}{-(-\sin x)} = \lim_{x\to 0} 2(\cos x)^{-3} = 2.$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2.$

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ határértékeket.

Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

Mivel itt nem egy tört határértékét kell kiszámolnunk, ezért előbb közös nevezőre hozással törtté alakítjuk a kifejezést:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

3. feladat (d)

A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ határértékeket.
Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

Mivel itt nem egy tört határértékét kell kiszámolnunk, ezért előbb közös nevezőre hozással törtté alakítjuk a kifejezést:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

Mivel ekkor a számláló és a nevező is 0-hoz tart, így alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+xe^x}$$

Ez is $\frac{0}{0}$ alakú, így ismét alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{1+1+0}=\frac{1}{2}$$

Tehát $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Házi feladatok

1. Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = xe^{-5x}$ függvény?
2. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$ függvény aszimptotáit.
3. Határozzuk meg az $f(x) = xe^{-5x}$ függvény végtelenbeli határértékeit.

Házi feladatok megoldása

1. A $(-\infty, \frac{2}{5})$ intervallumon konkáv, $(\frac{2}{5}, +\infty)$ intervallumon konvex.
2. Ferde aszimptoták: $-\infty$-ben $y = -2x - \dfrac{3}{4}$, $+\infty$-ben $y = 2x + \dfrac{3}{4}$.
3. A $-\infty$-ben $-\infty$, míg $+\infty$-ben 0.