4. vizsga végeredményei

4. szigorúan monoton csökkenő

5. (b)

6.
$$x\sin(3x) \approx x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+2} =$$
$$= 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{81}{40}x^6 + \dots + \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+2},$$

amiből az ötödfokú Taylor-polinom $3x^2 - \dfrac{9}{2}x^4$.

7. Az $f(x) = x + \frac{10x+100}{x} = x + 10 + \frac{100}{x}$ függvény minimumát keressük:
$f'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$, mely $x = 10$-ben tűnik el ($x > 0$).
Ez lokális minimum, hiszen a második derivált: $f''(x) = \frac{200}{x^3}$ pozitív.
A függvénynek $0 < x$ esetén van értelme, a széleken a függvény:
$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, tehát a lokális minimum globális is.
Tehát a porszívózás előtt 10 percig érdemes rendet rakni.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely: $x = 0$ és $x = 2$, paritás, periódus nincsen.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, nincs ferde aszimptota $\pm\infty$-ben ($a = +\infty$)
$f'(x) = 2(x^2 - 2x)(2x - 2) = 4x(x-2)(x-1) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$
$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$

	$x<0$	0	$(0,1-\frac{1}{\sqrt{3}})$	$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(1-\frac{1}{\sqrt{3}},1)$	1	$(1,1+\frac{1}{\sqrt{3}})$	$1+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(1+\frac{1}{\sqrt{3}},2)$	2	$2<x$
f'	$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$
f	$\searrow$	min		$\nearrow$		max		$\searrow$		min	$\nearrow$
f''		$+$		0		$-$		0		$+$	
f		$\smile$		i.p.		$\frown$		i.p.		$\smile$	

ÉK: $[0,+\infty)$

9. $$\int\frac{2x^2-3x-7}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(x-3)(2x+3)+2}{x-3}\,\mathrm{d}x = \int 2x+3+\frac{2}{x-3}\,\mathrm{d}x = x^2+3x+2\ln|x-3|+C$$

10. $$\int x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = x^2\frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x\frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2\sin(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C,$$

mivel
$$\int x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = x\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) - \int -\frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

11. A függvény deriváltja: $f'(x) = 3$, így a palástfelszín:
$$2\pi\int_2^3 (3x-1)\sqrt{1+3^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{10}\int_2^3 3x-1\,\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{10}\left[\frac{3}{2}x^2 - x\right]_2^3 = 2\pi\sqrt{10}\cdot\frac{13}{2} \approx 129{,}15$$