1. előadás

Improprius integrál

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

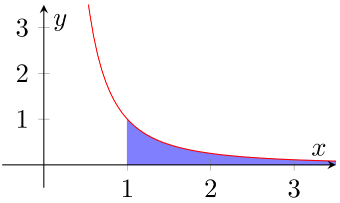
2024. február 12.

Bevezetés

Az a-tól b-ig tartó integrál: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mi történik, ha a b-vel a végtelenbe tartunk?

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Ez általában a végtelenhez tart, de van, amikor véges a határérték:

Példa: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^b x^{-2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=-\frac{1}{b}-\left(-\frac{1}{1}\right)=1-\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

Elsőfajú improprius integrál

Nem korlátos intervallumon integrálunk egy függvényt.

Az integrált véges intervallumokon vett integrálok határértékeként definiáljuk:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Ha ezek a határértékek léteznek és végesek, akkor azt mondjuk, hogy az improprius integrál konvergens.
Ha nem léteznek, vagy végtelen a határérték, akkor az integrál divergens.

Példa: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ az $[1, +\infty)$ intervallumon:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = 1$$

Egy másik példa

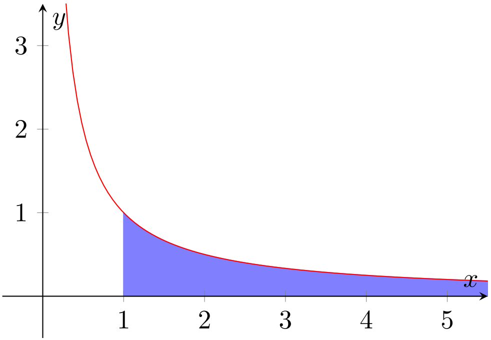
Integráljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényt az $[1, +\infty)$ intervallumon:

Egy másik példa

Integráljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvényt az $[1, +\infty)$ intervallumon:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty$$

Így ez az improprius integrál divergens.



Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \,\mathrm{d}x$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

A $p = 1$ esetén divergens (előző dia), míg $p \neq 1$ esetén:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} x^q = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 0 \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ 0, & \text{ha } q < 0 \end{cases}$$

Tehát $1 - p > 0$, azaz $1 > p$ esetén az improprius integrál divergens.
($p = 1$ esetén is divergens)
Ha $1 - p < 0$, azaz $1 < p$, akkor konvergens, és az értéke:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

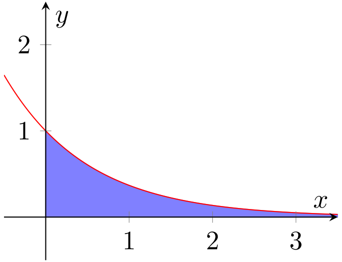
Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x =$$

Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{-b}-(-1) = 1$$

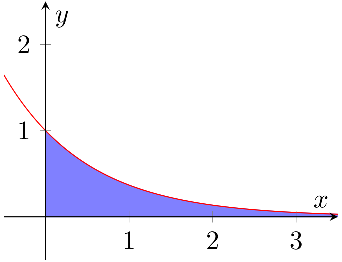
Felhasználtuk, hogy $(e^{-x})' = -e^{-x}$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$.

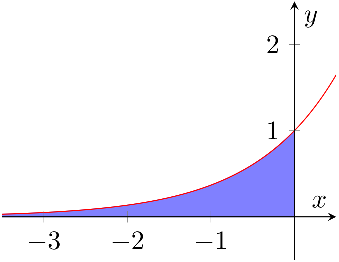


Az exponenciális függvény

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{-b} - (-1) = 1$$

Felhasználtuk, hogy $(e^{-x})' = -e^{-x}$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.





Ugyanez fordítva:

$$\int_{-\infty}^0 e^{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^{a}) = 1$$

Teljes számegyenesen vett integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

Teljes számegyenesen vett integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

Kiszámoljuk a két integrált:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_a^0 =$$
$$= \lim_{a\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

A másik hasonló:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b - 0 = \frac{\pi}{2}$$

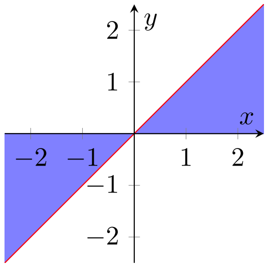
Tehát:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Egy veszély

Ha a teljes számegyenesen integrálunk, akkor muszáj szétszedni két integrálra, nem lehet egyetlen határértékkel felírni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{d}x \neq \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} x \, \mathrm{d}x = \lim_{a \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^{a} = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} \right) = 0$$



Valójában ez az impropius integrál divergens:

$$\int_{0}^{+\infty} x \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} x \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^2}{2} = +\infty$$

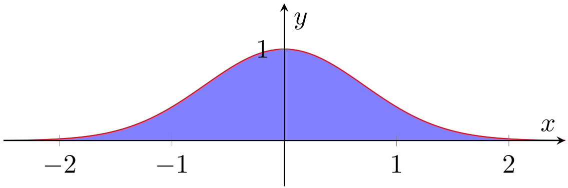
Gauss-görbe

Az $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ határozatlan integrált nem tudjuk felírni elemi függvényekkel.

De tudjuk, hogy

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$



Ennek a valószínűségszámításban és a statisztikában van szerepe (normális eloszlás sűrűségfüggvénye).