

# 10. előadás

## Komplex számok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 12.

## Bevezető mese: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

Ha  $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , akkor

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) + (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) - (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{2}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{2}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

Még osztani is tudunk:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} &= \frac{a_1 + b_1\sqrt{2}}{a_2 + b_2\sqrt{2}} \cdot \frac{a_2 - b_2\sqrt{2}}{a_2 - b_2\sqrt{2}} = \frac{(a_1a_2 - 2b_1b_2) + (a_2b_1 - a_1b_2)\sqrt{2}}{a_2^2 - 2b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 - 2b_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - 2b_2^2} \sqrt{2} \end{aligned}$$

A racionális számok körében az  $x^2 - 2 = 0$  egyenletnek nincs megoldása, de a  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ -ben már van.

# A komplex számok

Az  $x^2 + 1 = 0$ , azaz az  $x^2 = -1$  egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen  $i = \sqrt{-1}$  egy szimbólum, amivel számolunk ( $i^2 = -1$ ).

Ekkor minden szám  $a + bi$  alakú ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), és úgy számolunk, mintha  $i$  egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy  $i^2 = -1$ .

**Összeadás:**

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) =$$

# A komplex számok

Az  $x^2 + 1 = 0$ , azaz az  $x^2 = -1$  egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen  $i = \sqrt{-1}$  egy szimbólum, amivel számolunk ( $i^2 = -1$ ).

Ekkor minden szám  $a + bi$  alakú ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), és úgy számolunk, mintha  $i$  egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy  $i^2 = -1$ .

**Összeadás:**

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

**Kivonás:**

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) =$$

# A komplex számok

Az  $x^2 + 1 = 0$ , azaz az  $x^2 = -1$  egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen  $i = \sqrt{-1}$  egy szimbólum, amivel számolunk ( $i^2 = -1$ ).

Ekkor minden szám  $a + bi$  alakú ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), és úgy számolunk, mintha  $i$  egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy  $i^2 = -1$ .

**Összeadás:**

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

**Kivonás:**

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 + (-2)i = -2 - 2i$$

**Szorzás:**

$$(2 + 3i)(4 + 5i) =$$

# A komplex számok

Az  $x^2 + 1 = 0$ , azaz az  $x^2 = -1$  egyenletnek nincs valós megoldása.

Legyen  $i = \sqrt{-1}$  egy szimbólum, amivel számolunk ( $i^2 = -1$ ).

Ekkor minden szám  $a + bi$  alakú ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), és úgy számolunk, mintha  $i$  egy változó lenne, de kihasználjuk, hogy  $i^2 = -1$ .

**Összeadás:**

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$$

**Kivonás:**

$$(2 + 3i) - (4 + 5i) = -2 + (-2)i = -2 - 2i$$

**Szorzás:**

$$(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i$$

A **komplex számok**  $z = a + bi$  alakúak ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), ahol

$a$  a **valós rész**, jelölés:  $a = \operatorname{Re} z = \Re z$

$b$  a **képzetes rész**, jelölés:  $b = \operatorname{Im} z = \Im z$

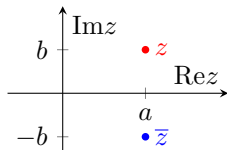
Komplex számok halmazának jelölése:  $\mathbb{C}$ .

# Osztás

A  $z = a + bi$  komplex szám

konjugáltja:  $\bar{z} = a - bi$ ;

abszolút értéke:



$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2i^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Osztás:**

bővítünk a nevező konjugáltjával:

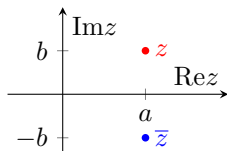
$$\frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} =$$

# Osztás

A  $z = a + bi$  komplex szám

konjugáltja:  $\bar{z} = a - bi$ ;

abszolút értéke:



$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a + bi)(a - bi)} = \sqrt{a^2 - abi + abi - b^2i^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Osztás:**

bővítünk a nevező konjugáltjával:

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{4 + 5i} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 - 5i)}{(4 + 5i)(4 - 5i)} = \frac{8 - 10i + 12i - 15i^2}{16 - 20i + 20i - 25i^2} = \\ &= \frac{23 + 2i}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i \end{aligned}$$



# Feladat

$$\frac{8 - i}{3 - 2i} = ?$$

$$\frac{8-i}{3-2i} = ?$$

$$\begin{aligned}\frac{8-i}{3-2i} &= \frac{8-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(8-i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{24+16i-3i-2i^2}{3^2+2^2} = \\ &= \frac{24+16i-3i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i\end{aligned}$$

# Polinomok gyöke

$i^2 = -1$ , így  $(2i)^2 = -4$  és  $(-2i)^2 = -4$ .

Egy negatív  $q$  szám négyzetgyöke:  $\pm\sqrt{-qi}$ .

Másodfokú egyenlet a komplex számok körében:

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

**Algebra alaptétele:**

Egy (legalább elsőfokú) polinomnak mindig van gyöke a komplex számok körében.

**Következmény:**

Egy  $n$ -edfokú polinomot  $n$  darab gyöktényező szorzatára bonthatunk a komplex számok körében:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

A  $z_1, z_2, \dots, z_n$  az  $n$  darab gyöke a polinomnak (nem feltétlenül különbözőek).

# Trigonometrikus alak

Egy komplex szám  $a + bi$  alakban való felírását **algebrai alaknak** nevezzük.

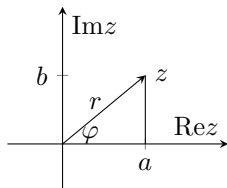
A komplex szám **trigonometrikus alakja**  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ahol

$r = |z|$  az abszolút érték és

$\varphi$  az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés:  $\arg z$ ).

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ , amiből

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$



Példa áttérésre:

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

# Trigonometrikus alak

Egy komplex szám  $a + bi$  alakban való felírását **algebrai alaknak** nevezzük.

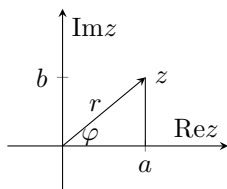
A komplex szám **trigonometrikus alakja**  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ahol

$r = |z|$  az abszolút érték és

$\varphi$  az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés:  $\arg z$ ).

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ , amiből

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} & \text{ha } a > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi & \text{ha } a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0 \end{cases}$$



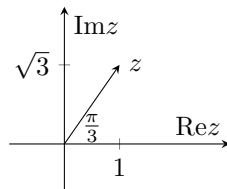
Példa áttérésre:

$$z = 1 + \sqrt{3}i \rightsquigarrow a = 1 \text{ és } b = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3} \quad (a = 1 > 0)$$

$$\text{Így } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$



# Műveletek a trigonometrikus alakkal

Összeadás, kivonás általában nehéz a trigonometrikus alakkal.

**Szorzás:**

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

**Osztás:**

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

**Hatványozás (Moivre-képlet):**

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$$

**Gyökvonás:**

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

# Példa

$\sqrt[3]{-1}$  komplex számok körében

# Példa

$\sqrt[3]{-1}$  komplex számok körében

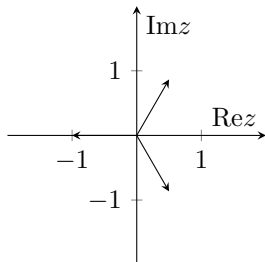
Először át kell írni trigonometrikus alakba:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(0) + \pi = \pi \quad (-1 < 0)$$

Tehát

$$-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$$



Gyökvonás:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + k \cdot 2\pi}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \quad 1 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \quad 1 \left( \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 2 \quad 1 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$