11. előadás

Komplex számok ábrázolása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 25.

Trigonometrikus alak

Egy komplex szám $a + bi$ alakban való felírását algebrai alaknak nevezzük.

A komplex szám trigonometrikus alakja $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol
$r = |z|$ az abszolút érték és
φ az argumentum, azaz a komplex szám helyvektora és a valós tengely által bezárt szög a komplex síkon (jelölés: $\arg z$).

Szorzás:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Ha $r_1 = 1$, akkor ez egy forgatás, ha $\varphi_1 = 0$, akkor nyújtás.

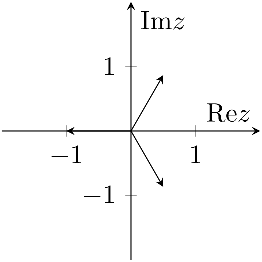
Általában a kettő kompozíciója, amit forgatva nyújtásnak nevezünk.

Gyökvonás

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Origó középpontú, szabályos n-szög csúcsai.

Példa: $\sqrt[3]{-1}$ komplex számok körében



Komplex számok ábrázolása

$|z| = 2$

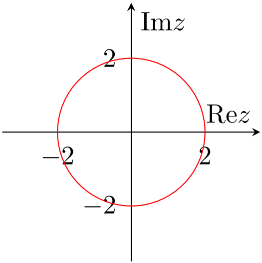
Komplex számok ábrázolása

$|z| = 2$

Ha $z = a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, így az egyenlet:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2$$
$$a^2 + b^2 = 4,$$

ami egy kör egyenlete (origó középpontú, 2 sugarú).



Komplex számok ábrázolása

$|z + 2i| \leq 2$

Komplex számok ábrázolása

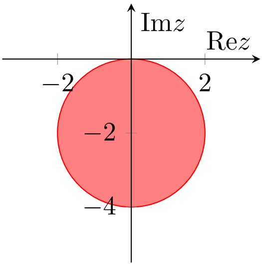
$|z + 2i| \leq 2$

Ha $z = a + bi$, akkor $z + 2i = a + (b + 2)i$, így az egyenlet:

$$\begin{aligned} |z + 2i| &\leq 2 \\ \sqrt{a^2 + (b+2)^2} &\leq 2 \\ a^2 + (b+2)^2 &\leq 4, \end{aligned}$$

ami egy kör belsejét határozza meg (középpontja: $(0, -2)$, sugara 2).

Úgy is tekinthetjük, hogy a z komplex szám legfeljebb 2 távolságra van a $-2i$ komplex számtól ($z + 2i = z - (-2i)$).



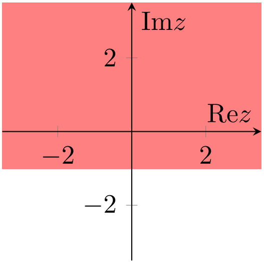
Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Im} z > -1$

Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Im} z > -1$

Ha $z = a + bi$, akkor $\operatorname{Im} z = b$, tehát $b > -1$, ami egy félsíkot határoz meg.



Komplex számok ábrázolása

$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$

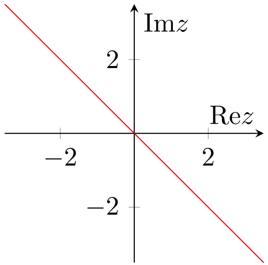
Komplex számok ábrázolása

$\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 0$

Ha $z = a + bi$, akkor $\mathrm{Re}\, z = a$ és $\mathrm{Im}\, z = b$, így

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z &= 0 \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

ami egy egyenes egyenlete.



Feladat

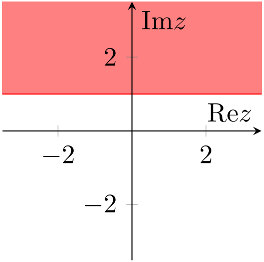
Ábrázoljuk a komplex számsíkon az $\mathrm{Im}\,(z+i) \geq 2$ halmazt.

Feladat

Ábrázoljuk a komplex számsíkon az $\operatorname{Im}(z+i) \geq 2$ halmazt.

Ha $z = a + bi$, akkor

$$\begin{aligned} z + i &= a + (b+1)i \\ \operatorname{Im}(z+i) &= b + 1 \\ 2 &\leq b + 1 \\ 1 &\leq b \end{aligned}$$



Feladat 2

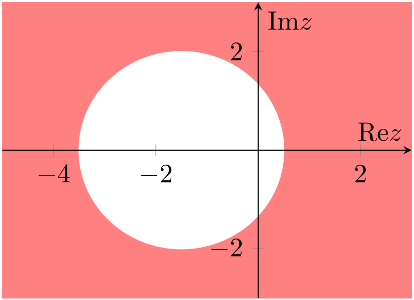
Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $|2z+3| > 4$ halmazt.

Feladat 2

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $|2z+3| > 4$ halmazt.

Ha $z = a + bi$, akkor

$$
\begin{aligned}
2z+3 &= 2a+3+2bi \\
|2z+3| &= \sqrt{(2a+3)^2+(2b)^2} \\
4 &< \sqrt{(2a+3)^2+(2b)^2} \\
16 &< (2a+3)^2+(2b)^2 \\
4 &< \left(a+\tfrac{3}{2}\right)^2+b^2
\end{aligned}
$$



Ami a $(-\frac{3}{2}, 0)$ középpontú, 2 sugarú kör külseje.

Úgyis tekinthettük volna, hogy a feladat ekvivalens a $\left|z-(-\frac{3}{2})\right| > 2$ egyenlőtlenséggel, ami azt fejezi ki, hogy a z komplex szám a $-\frac{3}{2}$-től nagyobb, mint 2 távolságra van.