

12. előadás

Lineáris transzformációk

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 26.

Lineáris leképezések

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ **lineáris leképezés**, ha

- ▶ $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})$ $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén és
- ▶ $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x})$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $n = k$, akkor **lineáris transzformációnak** nevezzük.

Tétel:

$\mathcal{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ lineáris leképezéshez létezik egy $k \times n$ -es \mathbf{A} mátrix, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ekkor az \mathbf{e}_1 bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$, azaz az \mathbf{A} mátrix első oszlopa.

Hasonlóan az \mathbf{e}_j bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$, azaz az \mathbf{A} mátrix j -edik oszlopa.

Kompozíció:

\mathcal{A}, \mathcal{B} lineáris leképezések, és \mathbf{A}, \mathbf{B} a megfelelő mátrixok, ekkor a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezéshez a $\mathbf{B}\mathbf{A}$ mátrix tartozik, mivel

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

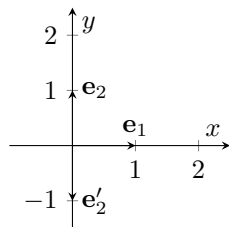
Transzformáció esetén a mátrix determinánsa azt határozza meg, hogy a transzformáció a térfogatot hányszorosára változtatja.

Síkon tükrözés

A síkon az x tengelyre tükrözünk.

Ekkor a bázisvektorok képe:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Tehát a transzformáció mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Valóban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Forgatás síkban

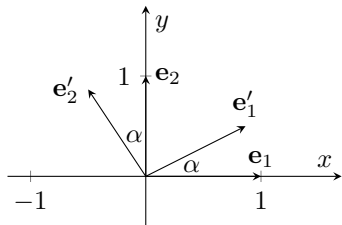
A síkon α szöggel forgatunk.

Ekkor a bázisvektorok képe:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Tehát a forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Forgatás térben

Ha a z tengely körül forgatunk:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a z tengely körüli forgatás mátrixa:
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan meggondolható, hogy

az x tengely körüli forgatás mátrixa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

az y tengely körüli forgatás mátrixa:
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Síkra való vetítés

Írjuk fel a xy síkra való vetítés transzformációnak a mátrixát!

Síkra való vetítés

Írjuk fel a xy síkra való vetítés transzformációnak a mátrixát!

A bázisvektorok képei:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

így a vetítés mátrixa:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Úgy is gondolkodhatunk, hogy a xy síkra való vetítés a következő transzformáció:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix},$$

amiből adódik a fenti mátrix, mert

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Egy pont képe

Mi a $P(1, 2, 3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk 60° -kal?

Egy pont képe

Mi a $P(1, 2, 3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk 60° -kal?

$$\text{A forgatás mátrixa: } \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Így a } P \text{ pont képe: } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

És ha még az x tengely irányában kétszeresére nyújtunk is?

Egy pont képe

Mi a $P(1, 2, 3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk 60° -kal?

$$\text{A forgatás mátrixa: } \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) & 0 \\ \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Így a } P \text{ pont képe: } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

És ha még az x tengely irányában kétszeresére nyújtunk is?

$$\text{Az } x \text{ tengely irányú nyújtás mátrixa: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ így:}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kompozíció

Tekintsük a z tengely körüli 60° -os forgatás és az x tengely irányú kétszeres nyújtás kompozícióját. Mi az $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ képe?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tehát a kompozíció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixok szorzásánál fordított a sorrend a transzformációk sorrendjéhez képest!

Feladat

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk 150° -kal. Mi a mátrixa ennek a transzformációnak? Mi a $P(3, 1, 2)$ pont képe?

Feladat

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk 150° -kal. Mi a mátrixa ennek a transzformációnak? Mi a $P(3, 1, 2)$ pont képe?

Az yz síkra való tükrözés mátrixához tekintsük a bázisvektorok képeit:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

így az yz síkra való tükrözés mátrixa $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Az y tengely körüli 150° -os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(150^\circ) & 0 & \sin(150^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(150^\circ) & 0 & \cos(150^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Feladat folytatása

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk 150° -kal. Mi lesz ennek a transzformációnak a mátrixa? Mi a $P(4, 3, 2)$ pont képe?

A kompozíció mátrixa az egyes transzformációk mátrixainak szorzata (fordított sorrendben):

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

A $P(4, 3, 2)$ pont képe:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} + 1 \\ 3 \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Sajátértékek és sajátvektorok

\mathcal{A} egy lineáris transzformáció, keresünk egy olyan (nem null)vektort, amit megnyújt: $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ valamilyen λ valós számra.

Ekkor λ a transzformáció **sajátértéke** és \mathbf{v} a hozzá tartozó **sajátvektor**.

Példák:

- ▶ Egy tengely körüli forgatásnak a tengelye fix, így az irányvektora sajátvektor, melyhez tartozó sajátérték 1.
- ▶ Egy síkra való tükrözésnél a sík vektorai az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, míg a normálvektor a -1 sajátértékhez tartozó sajátvektor.
- ▶ Egy síkra való vetítésnél a sík vektorai az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok, míg a normálvektor a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektor.