# 15. előadás

## Többváltozós függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. április 15.

# Bevezetés

Egyváltozós függvény: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$).
Többváltozós függvény: $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
példák:

- vektor hossza: $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- vektor ellentettje: $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$

Többváltozós általában:
$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vagy $f\colon D_f \to \mathbb{R}^m$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}^n$).

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

$f_1, f_2, \ldots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ komponens függvények

Példa:
$f(x, y) = (xy, x^2 + y^2, x^3 - 1)$
$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$f_1(x, y) = xy$
$f_2(x, y) = x^2 + y^2$
$f_3(x, y) = x^3 - 1$

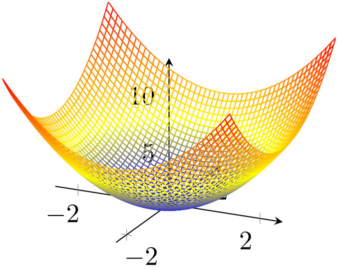
# Szemléltetés

$n = 2$ és $m = 1$, azaz $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja $z = f(x, y)$, azaz

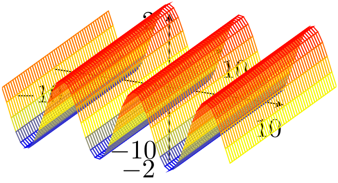
$$\{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Példák:

$f(x, y) = x^2 + y^2$ forgási paraboloid




$f(x, y) = \sin x$ „hullámpala"



# Határérték

Emlékeztető (egyváltozós eset):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0$ pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvénynek az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban a határértéke $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ esetén $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$.
Jelölés: $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Az $f$ függvény folytonos az $\mathbf{a}$ pontban, ha $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$.

Példa:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A függvényérték
- az $x$ tengelyen: $0$
- az $y$ tengelyen: $0$
- az $x = y$ egyenesen $\dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2}$

Így nincs határértéke az origóban.

# Parciális deriválás

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az $x_i$ változó szerint parciálisan deriválható az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha az

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$-ben.
A derivált értéke a parciális derivált.
Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7 \\ f'_x(x,y) &= 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy \\ f'_y(x,y) &= 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

Egy háromváltozós:

$$f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8$$

# Parciális deriválás

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény az $x_i$ változó szerint parciálisan deriválható az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha az

$$x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

függvény deriválható $x_i = a_i$-ben.
A derivált értéke a parciális derivált.
Jelölés: $f'_{x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ vagy $\partial_i f(\mathbf{a})$, stb.

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7 \\ f'_x(x,y) &= 3 \cdot 2x + 2y \cdot 2x = 6x + 4xy \\ f'_y(x,y) &= 0 + 2x^2 + 4y^3 = 2x^2 + 4y^3 \end{aligned}$$

Egy háromváltozós:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 3x^2y - y^3z - xyz - 6x + 7y - 8 \\ f'_x(x,y,z) &= 6xy - yz - 6 \\ f'_y(x,y,z) &= 3x^2 - 3y^2z - xz + 7 \\ f'_z(x,y,z) &= -y^3 - xy \end{aligned}$$

# Magasabb rendű parciális deriváltak

Valamelyik parciális deriváltat még egyszer lederiváljuk:

$$f(x,y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 6x + 4xy$$
$$f'_y(x,y) = 2x^2 + 4y^3$$

másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) =$$
$$f''_{xy}(x,y) =$$
$$f''_{yx}(x,y) =$$
$$f''_{yy}(x,y) =$$

# Magasabb rendű parciális deriváltak

Valamelyik parciális deriváltat még egyszer lederiváljuk:

$$f(x,y) = 3x^2 + 2x^2y + y^4 - 7$$

elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 6x + 4xy$$

$$f'_y(x,y) = 2x^2 + 4y^3$$

másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 6 + 4y$$

$$f''_{xy}(x,y) = 4x$$

$$f''_{yx}(x,y) = 4x$$

$$f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

Young-tétel:
Ha a másodrendű parciális deriváltak léteznek és folytonosak, akkor

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

# Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenes egyenlete az $x_0$ pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az $(x_0, y_0)$ pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:

Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

# Érintősík egyenlete

Egy változó esetén az érintőegyenes egyenlete az $x_0$ pontban:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Két változóban érintősík egyenlete az $(x_0, y_0)$ pontban:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Ez egy sík egyenlete:

$$-f'_x(x_0, y_0)x - f'_y(x_0, y_0)y + z = -f'_x(x_0, y_0)x_0 - f'_y(x_0, y_0)y_0 + f(x_0, y_0)$$

Példa:
Az $f(x, y) = x^2y^3 - 3y + 4$ függvény $(2, 1)$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y^3 - 3y + 4 & f(2,1) &= 5 \\ f'_x(x, y) &= 2xy^3 & f'_x(2,1) &= 4 \\ f'_y(x, y) &= 3x^2y^2 - 3 & f'_y(2,1) &= 9 \end{aligned}$$

Érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= 4(x - 2) + 9(y - 1) + 5 \\ z &= 4x + 9y - 12 \end{aligned}$$

# Gradiens

Ha egy $n$ változós $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az $f$ függvény $P_0$-beli gradiense az az $n$ dimenziós vektor, melynek koordiánátái a $P_0$-beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \ldots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\operatorname{grad} f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$f(x, y, z) = x^3 y + 4z + 5 \qquad\qquad (2, 1, 3) \text{ pontban:}$$

# Gradiens

Ha egy $n$ változós $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban az összes parciális deriváltja létezik, akkor az $f$ függvény $P_0$-beli gradiense az az $n$ dimenziós vektor, melynek koordiánátái a $P_0$-beli parciális deriváltak:

$$(f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$$

Jelölés: $\mathrm{grad} f(P_0)$ vagy $\nabla f(P_0)$ (nabla).

Példa:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^3y + 4z + 5 \\ f'_x(x,y,z) &= 3x^2y \\ f'_y(x,y,z) &= x^3 \\ f'_z(x,y,z) &= 4 \end{aligned}$$

$(2,1,3)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(2,1,3) &= 12 \\ f'_y(2,1,3) &= 8 \\ f'_z(2,1,3) &= 4 \end{aligned}$$

Tehát $\mathrm{grad} f(2,1,3) = (12, 8, 4)$.

# Iránymenti derivált

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $P_0 \in \mathbb{R}^n$ pontbeli és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor ($|\mathbf{e}| = 1$) irányú deriváltja (iránymenti deriváltja) a

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|}$$

határérték, ahol a $P$ pont úgy tart a $P_0$-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egyállású.
Ezzel megegyező határérték:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés: $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ vagy $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(P_0)$.

Tétel:
Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény iránymenti deriváltját általában kiszámolhatjuk a következő skaláris szorzat segítségével:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

# Példa

Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3$ függvény $(3,4)$ irányú deriváltját a $P_0(1,2)$ pontban.

# Példa

Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2y - xy^3 + 6x - 3$ függvény $(3,4)$ irányú deriváltját a $P_0(1,2)$ pontban.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y - xy^3 + 6x - 3 \\ f'_x(x,y) &= 2xy - y^3 + 6 \\ f'_y(x,y) &= x^2 - 3xy^2 \end{aligned}$$

$P_0(1,2)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(1,2) &= 2 \\ f'_y(1,2) &= -11 \end{aligned}$$

$\mathrm{grad} f(1,2) = (2,-11)$

A $(3,4)$ irányú derivált esetén az egységvektor: $\mathbf{e} = \dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

Az $f$ függvény $\mathbf{e}$ irányú deriváltja a $P_0(1,2)$ pontban:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = (2,-11) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{38}{5}$$

# Iránymenti derivált minimuma/maximuma

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Az iránymenti derivált maximális, ha $\mathbf{e} = \dfrac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e} = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \frac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = \frac{|\mathrm{grad} f(P_0)|^2}{|\mathrm{grad} f(P_0)|} = |\mathrm{grad} f(P_0)|$$

Az iránymenti derivált minimális, ha $\mathbf{e} = -\dfrac{\mathrm{grad} f(P_0)}{|\mathrm{grad} f(P_0)|}$. Ekkor az iránymenti derivált értéke:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = -|\mathrm{grad} f(P_0)|$$

Ha $\mathbf{e}$ merőleges $\mathrm{grad} f(P_0)$-re, akkor $f'_{\mathbf{e}}(P_0) = 0$.