17. előadás

Lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. április 22.

Emlékeztető: egyváltozós eset

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja
lokális minimumhely, ha van olyan $\delta > 0$, hogy
$f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.
A lokális minimum az $f(x_0)$ függvényérték.

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja
lokális maximumhely, ha van olyan $\delta > 0$, hogy
$f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén.
A lokális maximum az $f(x_0)$ függvényérték.

Lokális szélsőérték: lokális minimum vagy lokális maximum.

Lokális szélsőértékhely: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely.

Szükséges feltétel:
x_0 lokális szélsőértékhely, akkor $f'(x_0) = 0$

Másodrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely
$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Ugyanez több változóban

Egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont egy környezete valamilyen $\varepsilon > 0$-ra az $\mathbf{x}_0$ középpontú, ε sugarú gömb belseje: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\}$.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont lokális minimumhelye, ha $\mathbf{x}_0$-nak van egy olyan D környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ esetén $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.
Ekkor a lokális minimum az $f(\mathbf{x}_0)$ függvényérték.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont lokális maximumhelye, ha $\mathbf{x}_0$-nak van egy olyan D környezete, hogy minden $\mathbf{x} \in D$ esetén $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$.
Ekkor a lokális maximum az $f(\mathbf{x}_0)$ függvényérték.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):
Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor $\mathbf{x}_0$-ban az összes létező parciális deriváltja 0.

Az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény stacionárius pontja, ha itt a függvény összes parciális deriváltja 0.

Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):
Ha a $P_0(x_0, y_0)$ környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{(stacionárius pont)}$$

és

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 > 0,$$

akkor lokális szélsőértéke van a függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban.

Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($\Leftrightarrow f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$), akkor lokális minimuma van.
Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ($\Leftrightarrow f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$), akkor lokális maximuma van.

Hesse-féle determináns:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

Nyeregpont

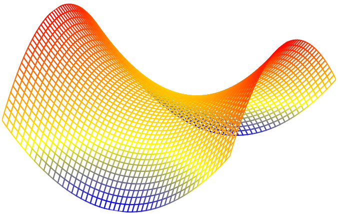
Tétel (nyeregpont):
Ha a $P_0(x_0, y_0)$ környezetében az $f(x, y)$ függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{(stacionárius pont)}$$

és

$$f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - \left(f''_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 < 0,$$

akkor a függvénynek nincs lokális szélsőértéke a $P_0(x_0, y_0)$ pontban (nyeregpont).



Példa

$$f(x, y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

Példa

$$f(x,y) = (x^2 - 6x)(y^2 - 4y)$$

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = (2x - 6)(y^2 - 4y)$$
$$f'_y(x,y) = (x^2 - 6x)(2y - 4)$$

Egy stacionárius pontban mindkettőnek el kell tűnnie. Ha az x szerinti 0:

$$(2x - 6)(y^2 - 4y) = 0$$

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y^2 - 4y &= 0 \\ (y-4)y &= 0 \\ y = 4 \quad y &= 0 \end{aligned}$$

Az y szerinti parciális deriváltból:

$$(x^2 - 6x)(2y - 4) = 0$$

Ha $x = 3$, akkor $y = 2$.
Ha $y = 4$ vagy $y = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = 6$.

Tehát a stacionárius pontok: $(3,2)$, $(0,0)$, $(0,4)$, $(6,0)$, $(6,4)$.

Példa folytatása

$$f'_x(x,y) = (2x-6)(y^2-4y)$$
$$f'_y(x,y) = (x^2-6x)(2y-4)$$

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x,y) = 2(y^2-4y)$$
$$f''_{xy}(x,y) = (2x-6)(2y-4)$$
$$f''_{yy}(x,y) = 2(x^2-6x)$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = 2(y^2-4y)\cdot 2(x^2-6x) - (2x-6)^2(2y-4)^2$$

A stacionárius pontok:

$(3,2)$	$144 > 0$	lokális szélsőérték
$(0,0)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(0,4)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(6,0)$	$-576 < 0$	nyeregpont
$(6,4)$	$-576 < 0$	nyeregpont

Mivel $f''_{xx}(3,2) = -8 < 0$, így a $(3,2)$ pont lokális maximumhely.
A lokális maximum értéke: $f(3,2) = 36$.

Feladat

$$f(x, y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$$

Feladat

$$f(x,y) = 1 + x + 4y - 3x^3 - 3y^3$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= 1 - 9x^2 & &\Rightarrow 1 - 9x^2 = 0 & &\Rightarrow x^2 = \tfrac{1}{9} & &\Rightarrow x = \pm\tfrac{1}{3} \\
f'_y(x,y) &= 4 - 9y^2 & &\Rightarrow 4 - 9y^2 = 0 & &\Rightarrow y^2 = \tfrac{4}{9} & &\Rightarrow y = \pm\tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

A stacionárius pontok: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = -18x \qquad f''_{xy}(x,y) = 0 \qquad f''_{yy}(x,y) = -18y$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x,y) f''_{yy}(x,y) - \left(f''_{xy}(x,y)\right)^2 = (-18x)(-18y) - 0^2 = 324xy$$

A stacionárius pontok:

$$\begin{array}{rrl}
\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & 72 > 0 & \text{lokális maximum} \\
\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\
\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & -72 < 0 & \text{nyeregpont} \\
\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) & 72 > 0 & \text{lokális minimum}
\end{array}$$

Szöveges feladat

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.
Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Szöveges feladat

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.
Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?

Legyenek az oldalhosszak a, b, c. Tudjuk, hogy a térfogata 1:

$$1 = abc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{ab}$$

A felhasznált anyag: $ab + 2bc + ac$. Ezekből a minimalizálandó függvény:

$$f(a,b) = ab + \frac{2b}{ab} + \frac{a}{ab} = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Szöveges feladat folytatás

$$f(a,b) = ab + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$f'_a(a,b) = b - \frac{2}{a^2} \qquad \Rightarrow b - \frac{2}{a^2} = 0 \qquad \Rightarrow a^2 b = 2$$

$$f'_b(a,b) = a - \frac{1}{b^2} \qquad \Rightarrow a - \frac{1}{b^2} = 0 \qquad \Rightarrow ab^2 = 1$$

Amiből $a^3b^3 = 2$, azaz $ab = \sqrt[3]{2}$. Így

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \qquad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$$

Tehát egyetlen stacionárius pont a $\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}}\right)$. A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{aa}(a,b) = \frac{4}{a^3} \qquad f''_{ab}(a,b) = 1 \qquad f''_{bb}(a,b) = \frac{2}{b^3}$$

Hesse-féle determináns:

$$f''_{aa}(a,b) f''_{bb}(a,b) - \left(f''_{ab}(a,b)\right)^2 = \frac{4}{a^3}\frac{2}{b^3} - 1^2 = \frac{8}{a^3b^3} - 1$$

Ennek az értéke a stacionárius pontban $3 > 0$, így ez lokális szélsőérték.
Mivel $f''_{aa}\left(2^{\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}}\right) > 0$, így lokális minimum. Ekkor $c = \frac{1}{ab} = 2^{-\frac{1}{3}}$.

Szöveges feladat második kérdése

Géza a pajtája falához egy $1 \ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.
Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?
Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Szöveges feladat második kérdése

Géza a pajtája falához egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú felülről nyitott téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta alkotja, csak a maradék három oldalát és az alját kell elkészítenie.
Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia?
Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja!

Ekkor a függvényből kimarad az ab tag:

$$f(a,b) = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_a(a,b) &= -\frac{2}{a^2} & \Rightarrow && -\frac{2}{a^2} = 0 \\ f'_b(a,b) &= -\frac{1}{b^2} & \Rightarrow && -\frac{1}{b^2} = 0 \end{aligned}$$

Nincs megoldás.

Magasabb dimenziós eset

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek a $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pontban a függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_{x_1}(P_0) = f'_{x_2}(P_0) = \cdots = f'_{x_n}(P_0) = 0 \quad (P_0 \text{ stacionárius pont})$$

és

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

- mindegyike pozitív, akkor P_0 lokális minimum.
- váltakozó előjelű és $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor P_0 lokális maximum.