19. előadás

Numerikus sorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet, Geometria Tanszék

2024. május 7.

Sorozatok ismétlés

Sorozat:
Minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot.
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Példa:
$a_n = \frac{1}{n}$.
Általában a végtelenbeli határérték érdekel minket, tulajdonképpen a „végtelen megközelítése''.

Tulajdonságok (hasonlóan a függvényekhez):
alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$
felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$
korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$
legnagyobb alsó korlát $\inf a_n$
legkisebb felső korlát $\sup a_n$
monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$
szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$
monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$
szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

Sorozatok határértéke

Csak a $+\infty$-ben vizsgáljuk!

Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.
Jelölés: $a_n \to A$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$.
Jelölés: $a_n \to +\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Az a_n sorozat határértéke a $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n < K$.
Jelölés: $a_n \to -\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Egy sorozat konvergens, ha létezik $A \in \mathbb{R}$ határértéke.

Egy sorozat divergens, ha nem konvergens.

Ha egy sorozat határértéke 0, akkor nullsorozat.

Műveletek és a határérték

Tétel:
Ha $a_n \to A$, $b_n \to B$, akkor

$$\begin{aligned} a_n + b_n &\to A + B \\ a_n - b_n &\to A - B \\ a_n b_n &\to AB \\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0 \\ c a_n &\to cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nevezetes sorozatok

$$\frac{1}{n} \to 0$$

$$\frac{1}{n^a} \to 0, \text{ ha } a > 0$$

$$n^a \to +\infty, \text{ ha } a > 0$$

$$q^n \to \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{q} \to 1, \text{ ha } q > 0$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

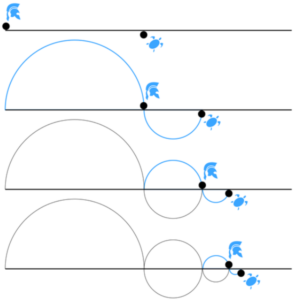
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

$$\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \to e^q, \text{ ahol } q \in \mathbb{R}$$

Akhilleusz és a teknős

Zénón paradoxonja:
Akhilleusz és a teknős

A gyorslábú Akhilleusz versenyt fut a lomha teknőssel, akinek egy kis előnyt ad. Zénón érvelése szerint így soha nem fogja utólérni, mert míg odaér ahonnan a teknős indult, a teknős már haladt valamit. De mire odaér, már megint nem lesz ott a teknős...



A kép a Wikipédiáról származik:
`https://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeno_Achilles_Paradox.png`

Szumma ismétlése

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

Példa:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

Sor

Ha a_n egy sorozat, akkor a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ formális összeget numerikus sornak nevezzük.
Az N-edik részletösszeg:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort akkor nevezzük konvergensnek, ha a részletösszegek $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ sorozata konvergens. Ennek határértéke a sor összege:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor részletösszegei:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

A sor összege ennek a határértéke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1$$

Geometriai sor

Tudjuk, hogy

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Így a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^N,$$

melynek határértéke 2, ennyi a sor összege.

Általában $|q|<1$ esetén a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1+q+q^2+\ldots$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q},$$

melynek határértéke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 5^n}{3^{2n}/3} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 60 \left(\frac{5}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{60 \cdot \frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} = 60 \cdot \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = 60 \cdot \frac{5}{4} = 75$$

Akhilleuszra visszatérve

Tegyük fel, hogy a gyorslábú Akhilleusz sebessége 20 km/h, míg a lomha teknősé 1 km/h, de 1 km előnnyel indul.

A poziciójuk az idő függvényében:

idő	Akhilleusz	teknős
0	0	1
$\frac{1}{20}$	1	$1+\frac{1}{20}$
$\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2$	$1+\frac{1}{20}$	$1+\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2$
$\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{20}\right)^3$	$1+\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2$	$1+\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{20}\right)^3$

Így a találkozási hely:

$$1+\frac{1}{20}+\left(\frac{1}{20}\right)^2+\left(\frac{1}{20}\right)^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{20}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{20}}=\frac{20}{19}$$

Neumann feladata

Két kerékpáros egymástól 20 km-re egymás felé elindul 10 km/h-s sebességgel. Mikor indulnak, egy légy 15 km/h sebességgel elindul az egyik kerékpárról a másik felé, majd amikor azt eléri, vissza az elsőhöz, és így tovább egészen addig, amíg a két kerékpár találkozik. Mekkora utat tesz meg a légy?

Neumann feladata

Két kerékpáros egymástól 20 km-re egymás felé elindul 10 km/h-s sebességgel. Mikor indulnak, egy légy 15 km/h sebességgel elindul az egyik kerékpárról a másik felé, majd amikor azt eléri, vissza az elsőhöz, és így tovább egészen addig, amíg a két kerékpár találkozik. Mekkora utat tesz meg a légy?

fordulás	1. kerékpár	2. kerékpár	megtett út (légy)
0.	0	20	0
1.	8	12	12
2.	$9{,}6$	$10{,}4$	$12 + 2{,}4$
3.	$9{,}92$	$10{,}08$	$12 + 2{,}4 + 0{,}48$

A légy által megtett út:

$$12+2{,}4+0{,}48+\cdots = 12+\frac{12}{5}+\frac{12}{5^2}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{12}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{12}{1-\frac{1}{5}} = 15$$

Erre az eredményre jutunk, ha rájövünk, hogy a kerékpárosok egy óra múlva találkoznak, ami alatt a légy 15 km-t repül.

Harmonikus sor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy az a_n sorozat nullsorozat legyen (hiszen $a_n = S_n - S_{n-1}$). De ez nem elégséges:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots}_{\geq \frac{1}{2}}$$

Tehát $S_{2^k} \geq k\frac{1}{2}$, így $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$, azaz ez a sor divergens.