20. előadás

Numerikus sorok konvergenciája

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. május 13.

Harmonikus sor

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy az a_n sorozat nullsorozat legyen (hiszen $a_n = S_n - S_{n-1}$). De ez nem elégséges:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots}_{\geq \frac{1}{2}}$$

Tehát $S_{2^k} \geq k\frac{1}{2}$, így $\lim_{N\to\infty} S_N = +\infty$, azaz ez a sor divergens.

Cauchy-féle integrálkritérium:

Ha az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökken és pozitív, akkor

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ sor konvergens $\Longleftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens

Ennek egy következménye:

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$.

Például: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pozitív tagú sorok

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pozitív tagú sor, ha $a_n \geq 0$.

Pozitív tagú sorok esetén módszerek a konvergencia eldöntésére:

- majoráns kritérium
- minoráns kritérium
- gyökkritérium
- hányadoskritérium

Majoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül ($n \geq N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3}$ sor konvergens?

Majoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül ($n \geq N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3}$ sor konvergens?

$\frac{2n}{n^3+3} \approx \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, így talán konvergens.

Majoráns kritérium:

$$a_n = \frac{2n}{n^3+3} \leq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergens}$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3}$ is konvergens.

Minoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül ($n \geq N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ sor konvergens?

Minoráns kritérium

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokra $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül ($n \geq N$ esetén) és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ sor konvergens?

$\frac{n^2}{n^3+1} \approx \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$, így valószínűleg divergens.

Minoráns kritérium:

$$b_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} = a_n \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ is divergens.

Gyökkritérium

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor ez a kritérium nem mond semmit sem.

Példa:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ sor konvergens?

Gyökkritérium

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor ez a kritérium nem mond semmit sem.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ sor konvergens?

$a_n = \frac{n}{3^n}$, így

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$$

Tehát a gyökkritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ sor konvergens.

Hányadoskritérium

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor nem mond semmit sem.

Példa:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ sor konvergens?

Hányadoskritérium

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} < 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \\ > 1, & \text{akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens} \end{cases}$$

Ha a határérték nem létezik, vagy éppen 1, akkor nem mond semmit sem.

Példa:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ sor konvergens?

$a_n = \frac{n!}{2^n}$ és $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$, így

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\frac{n!}{2^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2} \to +\infty > 1$$

Tehát a hányadoskritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ sor divergens.

Feladat

Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-1}$ sor?

Feladat

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-1}$ sor?

Ha gyökkritériummal próbálkozunk: $a_n = \frac{2}{3n-1}$, így

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{3n-1}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{3n-1}} \to 1,$$

így ebből nem tudjuk, hogy konvergens-e.
Ezért a minoráns/majoráns kritériummal érdemes próbálkozni.
Mivel $\frac{2}{3n-1} \approx \frac{2}{3n}$, így valószínűleg divergens.
Ezért a minoráns kritériumot használjuk:

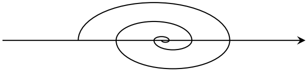
$$\frac{2}{3n-1} \geq \frac{2}{3n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n-1}$ sor is divergens.

Leibniz-sorok

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-típusú vagy Leibniz-sor, ha

- a_n alternáló (váltakozó előjelű)
- $a_n \to 0$
- $|a_n|$ monoton csökken



Tétel:

Minden Leibniz-sor konvergens.

Tétel (hibabecslés):

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ Leibniz-sor, akkor minden $N \in \mathbb{N}$-re

$$\left| A - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \leq |a_{N+1}| \,.$$

Példa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Teljesülnek rá a feltételek:

- a_n alternáló: igen $((-1)^n)$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$
- $|a_n| = \frac{1}{n}$ monoton csökken

Tehát Leibniz-sor, így konvergens.

Abszolút és feltételesen konvergens sorok

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens.

Tétel:
Minden abszolút konvergens sor konvergens.

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Példa:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens (Leibniz), de nem abszolút konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ami divergens.

Feltételesen konvergens sor átrendezése

Tekintsük a következő sort:

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\dots$$

Részletösszegek:

$$1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},0,\dots$$

Ennek a határértéke 0.

Ugyanez a sor kicsit átrendezve:

$$-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\dots$$

Ekkor a részletösszegek:

$$-1,0,-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-1,-\frac{3}{4},-\frac{7}{8},-1,\dots$$

Ekkor a határérték -1.