

5. előadás

Az n dimenziós valós tér vektorai

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. február 26.

Bevezetés

A 2 dimenziós síkon minden pontot két koordinátával jellemezhetünk: (x, y) .

Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$, ahol $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

A 3 dimenziós térben minden pontot három koordinátával jellemezhetünk: (x, y, z) .

Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$,

ahol $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ és $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Általánosítás: n dimenziós tér.

Itt n darab koordinátával jellemezhetünk egy pontot: (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Ennek helyvektora: $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$, ahol

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Az n dimenziós tér pontjait azonosíthatjuk a szám n -esekkel.

Jelölés: \mathbb{R}^n

Lineáris kombináció

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok **lineáris kombinációja**:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k,$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Példa:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 3)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\mathbf{v}_2 = (1, 2, 4)$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\mathbf{v}_3 = (3, -1, 2)$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\mathbf{v}_4 = (4, 0, 0)$$

$$\lambda_4 = 2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 &= 1 \cdot (0, 1, 3) + (-1) \cdot (1, 2, 4) + 0 \cdot (3, -1, 2) + 2 \cdot (4, 0, 0) = \\ &= (0, 1, 3) + (-1, -2, -4) + (0, 0, 0) + (8, 0, 0) = \\ &= (7, -1, -1) \end{aligned}$$

Lineáris függőség

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok **lineárisan (össze)függenek**, ha van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nem mind 0, hogy

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Példa: Az $(1, 2, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(3, 5, 1)$ vektorok lineárisan függnek:

$$(-2) \cdot (1, 2, 0) + 1 \cdot (2, 4, 0) + 0 \cdot (3, 5, 1) = (-2, -4, 0) + (2, 4, 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Példa: A $(0, 5, 0)$, $(4, 2, 3)$, $(2, 3, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek:

$$(0, 0, 0) = \lambda_1(0, 5, 0) + \lambda_2(4, 2, 3) + \lambda_3(2, 3, 0) = (4\lambda_2 + 2\lambda_3, 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_2)$$

Tehát:

$$0 = 4\lambda_2 + 2\lambda_3$$

$$0 = 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$0 = 3\lambda_2$$

Ebből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Feladat

Lineárisan függetlenek-e a $(4, 2, 8)$, $(5, 2, 1)$, $(6, 3, 12)$ vektorok?

Feladat

Lineárisan függetlenek-e a $(4, 2, 8)$, $(5, 2, 1)$, $(6, 3, 12)$ vektorok?

$$\begin{aligned}(0, 0, 0) &= \lambda_1(4, 2, 8) + \lambda_2(5, 2, 1) + \lambda_3(6, 3, 12) = \\ &= (4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, 8\lambda_1 + \lambda_2 + 12\lambda_3)\end{aligned}$$

Tehát:

$$0 = 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_3$$

$$0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$$

$$0 = 8\lambda_1 + \lambda_2 + 12\lambda_3$$

Az első két egyenletből: $\lambda_2 = 0$, így

$$0 = 4\lambda_1 + 6\lambda_3$$

$$0 = 2\lambda_1 + 3\lambda_3$$

$$0 = 8\lambda_1 + 12\lambda_3$$

Ezek az egyenletek ekvivalensek, így $\lambda_1 = 3$, $\lambda_3 = -2$ megoldás, tehát nem lineárisan függetlenek:

$$(0, 0, 0) = 3(4, 2, 8) + 0(5, 2, 1) - 2(6, 3, 12)$$

Generátorrendszer

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ n dimenziós vektorok az \mathbb{R}^n tér **generátorrendszere**, ha minden \mathbf{v} n dimenziós vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.

Azaz vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, hogy

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

Példák:

$\mathbf{e}_1(1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2(0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n(0, \dots, 0, 1)$ generátorrendszer, mert minden $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor előáll lineáris kombinációként:

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

$\mathbf{v}_1(1, 1, 0), \mathbf{v}_2(1, -1, 0), \mathbf{v}_3(0, 0, 3)$ is generátorrendszer:

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, -1, 0) + \lambda_3(0, 0, 3)$$

$$x = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$y = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$z = 3\lambda_3$$

Tehát $\lambda_3 = \frac{z}{3}, \lambda_1 = \frac{x+y}{2}, \lambda_2 = \frac{x-y}{2}$. Így:

$$(x, y, z) = \frac{x+y}{2}(1, 1, 0) + \frac{x-y}{2}(1, -1, 0) + \frac{z}{3}(0, 0, 3)$$

Bázis

Az n dimenziós térben n darab lineárisan független vektort **bázisnak** nevezünk.

Példa:

Standard bázis: $\mathbf{e}_1(1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2(0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n(0, \dots, 0, 1)$

De van sok más is, például: $(0, 5, 0), (4, 2, 3), (2, 3, 0)$.

Tétel:

Minden vektort fel tudunk írni egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, vagyis minden bázis generátorrendszer.

Tétel:

Egy n dimenziós térben ha

- ▶ k darab lineárisan független vektor van, akkor $k \leq n$.
- ▶ k darab vektor generátorrendszert alkot, akkor $k \geq n$.
- ▶ k darab vektor bázist alkot, akkor $k = n$.

Következmény:

Ha néhány lineárisan független vektor generátorrendszert alkot, akkor bázis.

Altér

Az \mathbb{R}^n tér egy V (nemüres) részhalmazát **altérnek** nevezzük, ha

- ▶ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, akkor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
- ▶ $\mathbf{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $\lambda \mathbf{v} \in V$

Példák:

$\{\mathbf{0}\}$ és \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^3 -ben $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, azaz azon vektorok, melyeknek harmadik koordinátája 0 (xy koordinátásík).

\mathbb{R}^3 -ben az $(x, 2x, z)$ alakú vektorok is alteret alkotnak. Úgy is írhatjuk, hogy $\{(x, y, z) \mid y = 2x\}$:

$$(x_1, 2x_1, z_1) + (x_2, 2x_2, z_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2), z_1 + z_2)$$
$$\lambda(x, 2x, z) = (\lambda x, \lambda \cdot 2x, \lambda z) = (\lambda x, 2\lambda x, \lambda z)$$

\mathbb{R}^3 alterei: $\{\mathbf{0}\}$, \mathbb{R}^3 , bármilyen origón átmenő sík, origón átmenő egyenes.

Az $(x, y, 1)$ alakú vektorok nem alkotnak alteret, mert $2(x, y, 1) = (2x, 2y, 2)$ már nem ilyen alakú.

Generált altér

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok által **generált altér** azon vektorokból áll, melyek előállnak $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ lineáris kombinációjaként.

Jelölése: $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Példa:

Az $(1, 2, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ vektorok által generált altér az $(x, 2x, z)$ alakú vektorok altére:

$$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) = (\lambda_1, 2\lambda_1, \lambda_2)$$

Feladat

Milyen alteret generálnak a $(2, 6, 4)$ és $(3, 9, 6)$ vektorok?

Feladat

Milyen alteret generálnak a $(2, 6, 4)$ és $(3, 9, 6)$ vektorok?

$$\begin{aligned}\lambda_1(2, 6, 4) + \lambda_2(3, 9, 6) &= (2\lambda_1 + 3\lambda_2, 6\lambda_1 + 9\lambda_2, 4\lambda_1 + 6\lambda_2) = \\ &= (2\lambda_1 + 3\lambda_2, 3(2\lambda_1 + 3\lambda_2), 2(2\lambda_1 + 3\lambda_2))\end{aligned}$$

Ez az $(x, 3x, 2x)$ alakú vektorok altere, azaz az $(1, 3, 2)$ vektor számszorosai, ami egy origón átmenő egyenes.