

6. előadás

Mátrixok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. február 27.

Bevezetés

Táblázatszerűen téglalapba írunk számokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

típusa: 3×5 (3 sora és 5 oszlopa van)

Általános jelölés:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Az \mathbf{A} mátrix i -edik sorának j -edik eleme a_{ij} .

Típusa: $m \times k$ (m sora és k oszlopa van).

Ha $k = m$, akkor **négyzetes mátrix**.

Transzponált

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Az \mathbf{A} mátrix **főátlója** az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}/a_{mm}$.

Az \mathbf{A} mátrix **mellékátlója** $a_{1k}, a_{2,k-1}, \dots$

Az $m \times k$ -as \mathbf{A} mátrix **transzponáltja** az a \mathbf{B} $k \times m$ -es mátrix, melyre

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m)$$

Jelölés: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$

Tulajdonság: $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$.

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Mátrixok és vektorok

Az n dimenziós vektorokat is tekinthetjük mátrixoknak:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Sorvektorként $1 \times n$ -es mátrix: $[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$

Oszlopvektorként $n \times 1$ -es mátrix: $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

Ezek egymás transzponáltjai:

$$[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]^T = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^T = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]$$

Műveletek mátrixokkal

Összeadás:

Az $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ akkor van értelmezve, ha a két mátrix ugyanolyan típusú.

A megfelelő elemeket adjuk össze, azaz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ esetén $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Különbség:

Az összeadáshoz hasonlóan, csak $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ esetén $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Valós számmal való szorzás:

$\lambda \in \mathbb{R}$ és \mathbf{A} egy $m \times k$ -as mátrix.

A valós számmal a mátrix minden elemét megszorozzuk, azaz $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$ esetén $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Példa:

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Ezek a műveletek vektorokra is ugyanígy működnek.

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} j \\ | \\ | \\ | \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{c} j \\ \square \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{c} j \\ \square \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \\ 4 & 25 & & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell}b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} j \\ | \\ | \\ | \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{c} j \\ \square \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \\ 4 & 25 & 19 & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \\ 4 & 25 & 19 & -2 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

$$i \left[\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{|c|} \hline j \\ \hline \end{array} \right] = i \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right]$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \\ 4 & 25 & 19 & -2 \\ 10 & & & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbf{A} $m_1 \times k_1$ -es és \mathbf{B} $m_2 \times k_2$ -es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha \mathbf{A} $m \times k$ -as, \mathbf{B} $k \times n$ -es, akkor a szorzatuk $m \times n$ -es \mathbf{C} mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^k a_{i\ell}b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

The diagram shows a row vector i (represented by a horizontal rectangle) multiplied by a column vector j (represented by a vertical rectangle). The result is a scalar element i (represented by a small square) in a larger matrix structure, with the row index i and column index j indicated above the respective parts.

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 25 & 19 & -2 \\ 10 & 57 & 43 & -4 \\ 16 & 89 & 67 & -6 \end{bmatrix}$$

Feladat

Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat.

Feladat

Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Szorzás tulajdonságai

Nem kommutatív:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Lehet, hogy az egyik elvégezhető, de a másik nem.

Ha el is végezhető, akkor is lehet különböző méretű az eredmény.

De még ha a méret stimmel, akkor sem kommutatív:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \quad \quad \mathbf{BA} =$$

Szorzás tulajdonságai

Nem kommutatív:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Lehet, hogy az egyik elvégezhető, de a másik nem.

Ha el is végezhető, akkor is lehet különböző méretű az eredmény.

De még ha a méret stimmel, akkor sem kommutatív:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Asszociatív:

Ha $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ értelmes, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ is, és ezek egyenlők:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Disztributív:

Ha $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$ értelmes, akkor $\mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ is, és ezek egyenlők:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Ha $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}$ értelmes, akkor $\mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ is, és ezek egyenlők:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Mátrixok szorzása jobbról

\mathbf{A} $m \times k$ típusú mátrix,

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ a k dimenziós tér egységvektorai (oszlopvektorként):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}\mathbf{e}_1$ az \mathbf{A} mátrix első oszlopa,

$\mathbf{A}\mathbf{e}_2$ az \mathbf{A} mátrix második oszlopa,

\vdots

$\mathbf{A}\mathbf{e}_k$ az \mathbf{A} mátrix k -adik (utolsó) oszlopa

Ha $\mathbf{v} = (1, 2, 0, \dots, 0)^\top$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$, akkor

$\mathbf{A}\mathbf{v}$ az \mathbf{A} első oszlopának és a második oszlopa kétszeresének összege,

$\mathbf{A}\mathbf{1}$ az \mathbf{A} oszlopainak összege.

Általában $\mathbf{A}\mathbf{v}$ az \mathbf{A} oszlopainak lineáris kombinációja ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ oszlopvektor), ahol az együtthatók a \mathbf{v} koordinátái.

Mátrixok szorzása balról

\mathbf{A} $m \times k$ típusú mátrix,

$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ az m dimenziós tér egységvektorai (sorvektorként):

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_m = (0, 0, \dots, 1)$$

$\mathbf{e}_1 \mathbf{A}$ az \mathbf{A} mátrix első sora,

$\mathbf{e}_2 \mathbf{A}$ az \mathbf{A} mátrix második sora,

\vdots

$\mathbf{e}_m \mathbf{A}$ az \mathbf{A} mátrix m -edik (utolsó) sora

Ha $\mathbf{v} = (1, 2, 0, \dots, 0)$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, akkor

\mathbf{vA} az \mathbf{A} első sorának és a második sora kétszeresének összege,

$\mathbf{1A}$ az \mathbf{A} sorainak összege.

Általában \mathbf{vA} az \mathbf{A} sorainak lineáris kombinációja ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ sorvektor), ahol az együtthatók a \mathbf{v} koordinátái.

Egységmátrix

Az $n \times n$ -es **egységmátrix** az az $n \times n$ -es mátrix, melynek a főátlójában minden elem 1-es és az összes többi eleme 0.

Jelölése: \mathbf{E}_n .

Példák:

$$\mathbf{E}_1 = [1] \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Tétel:

Ha az \mathbf{A} mátrix típusa $m \times k$, akkor:

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_k = \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Speciális eset: $m = k$ esetén (ekkor \mathbf{A} négyzetes):

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Vektorok szorzása

Ha \mathbf{v}, \mathbf{w} két n dimenziós oszlopvektor, akkor a $\mathbf{v}^\top \mathbf{w}$ mátrixszorzás eredménye egy 1×1 -es mátrix, melynek egyetlen eleme éppen a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ skaláris szorzat.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}^\top = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{v}\mathbf{w}^\top$ mátrixszorzásnak is van értelme, eredménye egy $n \times n$ -es mátrix, ezt **diadikus szorzatnak** nevezzük.

Ha sorvektorokként képzeljük el a vektorokat, akkor a $\mathbf{v}\mathbf{w}^\top$ szorzatmátrix egyetlen eleme adja meg a skaláris szorzatot.