

9. előadás

Mátrixok determinánása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 11.

Bevezetés

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánusa.

$$1 \times 1 \quad \mathbf{A} = [a] \quad \det \mathbf{A} = a$$

$$2 \times 2 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{A} = ad - bc$$

$$3 \times 3 \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{A} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Sarrus-szabály

Nagyobb méret esetén nincs ilyen egyszerű szabály.

Példák:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 11$$

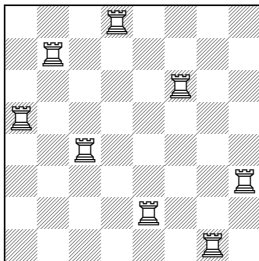
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2 =$$
$$= -4 + 0 + 3 + 2 - 3 - 0 = -2$$

Determináns általában

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

ahol π egy permutáció és σ az inverziók száma.

Bástyaelhelyezés: minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet választunk



Aldetermináns

Aldetermináns: Egy mátrixnak kiválasztjuk k sorát és k oszlopát, az ezekben álló elemek által meghatározott mátrix determinánása.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 7$$

Ha \mathbf{A} egy $n \times n$ -es mátrix, akkor A_{ij} jelöli az i -edik sor és a j -edik oszlop elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánását (aldetermináns).

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

Kifejtési tétel

$$\text{Az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ mátrix determinánsának meghatározásához:}$$

k -adik sor szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj}$$

k -adik oszlop szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik}$$

Az előjel a sakktabla-szabály szerint:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Példa a kifejtésre

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

első sor szerinti kifejtés:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (1 - 15) - 3 \cdot (2 - 20) + 4 \cdot (6 - 4) = \\ &= -14 - 3 \cdot (-18) + 4 \cdot 2 = 48 \end{aligned}$$

második oszlop szerinti kifejtés:

$$\det \mathbf{A} =$$

Példa a kifejtésre

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

első sor szerinti kifejtés:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (1 - 15) - 3 \cdot (2 - 20) + 4 \cdot (6 - 4) = \\ &= -14 - 3 \cdot (-18) + 4 \cdot 2 = 48 \end{aligned}$$

második oszlop szerinti kifejtés:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= -3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot (2 - 20) + 1 \cdot (1 - 16) - 3 \cdot (5 - 8) = \\ &= -3 \cdot (-18) - 15 + 9 = 48 \end{aligned}$$

A determináns kiszámítása

A determináns és a sortranszformációk:

- ▶ A determináns nem változik, ha a mátrix egy sorához egy másik sorának valahányszorosát hozzáadjuk.
- ▶ A determináns az ellentettjére változik, ha a mátrix két sorát megcseréljük.
- ▶ A determináns λ -val szorzódik, ha a mátrix egy sorát λ -val megszorozzuk.

Ugyanezek igazak oszloptranzformációkra is.

Egy négyzetes mátrixot **felső háromszögmátrixnak** nevezünk, ha a főátlója alatt minden elem 0.

A felső háromszögmátrixok determinánása a főátlóbeli elemek szorzata.

Példák:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

$$\det \mathbf{E}_n = 1$$

Egy példa

A $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánása sorműveletekkel:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & s_2 - 2s_1 \\ 2 & 1 & 5 & = \\ 4 & 3 & 1 & s_3 - 4s_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \\ 0 & -5 & -3 & \\ 0 & -9 & -15 & \end{array} \right| \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3} (-1) \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \\ 0 & -9 & -15 & s_2 / (-9) \\ 0 & -5 & -3 & = \end{array} \right| \\ & = (-1) \cdot (-9) \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \\ 0 & -5 & -3 & \end{array} \right| \xrightarrow{s_3 + 5s_2} 9 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & \end{array} \right| = 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{16}{3} = 48 \end{aligned}$$

Egy feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát sorműveletekkel!

Egy feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát sorműveletekkel!

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_2 - 2s_1 \\ s_3 - 4s_1 \\ s_4 - 3s_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_2/2} \\ & = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} s_3 + 6s_2 \\ s_4 + 3s_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \\ & = (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xrightarrow{s_4 - 3s_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \\ & = (-2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \\ & = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-10) = -20 \end{aligned}$$

Feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát tetszőleges módon!

Feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát tetszőleges módon!

Kifejtés a harmadik oszlop szerint:

$$\det \mathbf{A} = 0 \cdot |\dots| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\dots| = -10 + 18 = 8$$

Gyorsabb, ha előbb csinálunk egy sortranszformációt, és csak utána fejtünk ki:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_3 - 3s_2 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot (-1 - 12 - 12 + 4 + 4 + 9) = (-1) \cdot (-8) = 8 \end{aligned}$$

Néhány tétel

- ▶ $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$
- ▶ \mathbf{A} $n \times n$ -es mátrixra $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = n$ (rang maximális).
- ▶ \mathbf{A} $m \times k$ -as mátrix rangja a benne levő legnagyobb méretű nem nulla aldetermináns mérete.
- ▶ \mathbf{A}, \mathbf{B} ugyanakkora négyzetes mátrixokra: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
- ▶ \mathbf{A} pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

$$1 = \det(\mathbf{E}_n) = \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1})$$

Inverz mátrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \left((-1)^{i+j} A_{ji} \right)_{i,j=1}^n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 5$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

$$(A_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakk-tábla-szabály szerint szorozzuk:

$$\left((-1)^{i+j} A_{ji} \right)_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

$$(A_{ji})_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

2×2 -es mátrix inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. determináns: $\det \mathbf{A} = ad - bc$
2. aldeteminánsok mátrixa: $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$
3. transzponálás: $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$
4. sakktábla: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
5. determinánssal osztás:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} =$$

2×2 -es mátrix inverze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. determináns: $\det \mathbf{A} = ad - bc$
2. aldeteminánsok mátrixa: $\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$
3. transzponálás: $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$
4. sakktábla: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
5. determinánssal osztás:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix}$$

Cramer-szabály

- ▶ ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen
- ▶ a megoldás egyértelmű (\mathbf{A} rangja maximális: determinánsa nem 0)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}, \dots$$

A k -adik ismeretlen kifejezésében az együtthatómátrix k -adik oszlopát kicseréljük a \mathbf{b} oszlopvektorra.

Cramer-szabály – példa

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 4 \\ x + 3y - z & = & 6 \\ -2x + z & = & -5 \end{array} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 + 4 + 0 - 0 - 2 - 0 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{12 + 10 + 0 - 0 - 12 - 0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$y =$

$z =$

Cramer-szabály – példa

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 4 \\ x + 3y - z & = & 6 \\ -2x + z & = & -5 \end{array} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 + 4 + 0 - 0 - 2 - 0 = 5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{12 + 10 + 0 - 0 - 12 - 0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6 + 8 + 0 - 0 - 4 - 5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-15 + (-24) + 0 - (-24) - (-10) - 0}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

Vektorok szorzása

Vegyes szorzat:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, c_3) \end{aligned} \quad \text{vektorok vegyes szorzata a } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ determináns.}$$

Vektoriális szorzat (utolsó sor szerinti kifejtés):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} &= \mathbf{e}_1 \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{e}_2 \cdot (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{e}_3 \cdot (a_1 b_2 - a_2 b_1) = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

Sor- és oszlopműveletek

Sor- és oszlopműveletek használhatóak:

- ▶ egyenletrendszer megoldása (csak sorműveletek!)
- ▶ inverz számolása (első módszer) (csak sorműveletek!)
- ▶ mátrixok rangjának meghatározása
- ▶ determináns kiszámítása
 - ▶ csere: (-1) -es szorzó
 - ▶ sor/oszlop szorzásánál ki kell emelni a szorzót