

Készülés az 1. zh-ra

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 18.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}} dx \quad (b) \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} dx$$

2. Bontsuk fel a $(3, 2, -5)$ vektort az $(1, 0, 4)$ vektorral párhuzamos, és arra merőleges komponensekre.
3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely párhuzamos az $(1, 0, 2)$ és $(3, 1, -2)$ vektorokkal, és átmegy a $P(0, 2, 2)$ ponton.
Határozzuk meg a $Q(1, 2, 1)$ pont távolságát is ettől a síktól.
4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + 3y + 7z = 8$$

$$2x + 6y + 4z = 2$$

$$3x + 7y + 8z = 7$$

5. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}} dx$ improprius integrált.

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b (2x-3)^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-(2x-3)^{-\frac{1}{2}} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{2x-3}} \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sqrt{2b-3}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 - 3}} = 1\end{aligned}$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} dx$ improprius integrált!

Az integrandus $x = 3$ -nál tart a végtelenhez, így ott kell határértéket venni:

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \int_2^b (3-x)^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{b \rightarrow 3^-} \left[-\frac{(3-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \left[-\frac{3}{2}(3-x)^{\frac{2}{3}} \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow 3^-} -\frac{3}{2}(3-b)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(3-2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. feladat

Bontsuk fel a $(3, 2, -5)$ vektort az $(1, 0, 4)$ vektorral párhuzamos, és arra merőleges komponensekre.

Legyen $\mathbf{v} = (3, 2, -5)$ és $\mathbf{a} = (1, 0, 4)$. A szükséges skaláris szorzatok:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = -17$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17$$

A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{-17}{17} (1, 0, 4) = (-1, 0, -4)$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (3, 2, -5) - (-1, 0, -4) = (4, 2, -1)$$

3. feladat

Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely párhuzamos az $(1, 0, 2)$ és $(3, 1, -2)$ vektorokkal, és átmegy a $P(0, 2, 2)$ ponton.

Határozzuk meg a $Q(1, 2, 1)$ pont távolságát is ettől a síktól.

Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -2)$. A kérdéses sík normálvektora merőleges ezekre, így a vektoriális szorzatuk megfelelő normálvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0 \cdot (-2) - 2 \cdot 1, 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2), 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = (-2, 8, 1)$$

A kérdéses sík egyenlete:

$$-2x + 8y + z = 18$$

A $Q(1, 2, 1)$ pont távolságához a sík Hesse-féle normálalakja:

$$\frac{-2x + 8y + z - 18}{\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 1^2}} = 0$$

Így a $Q(1, 2, 1)$ pont távolsága:

$$\left| \frac{-2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 1 - 18}{\sqrt{69}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{69}} \right| = \frac{3}{\sqrt{69}} \approx 0,361$$

4. feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$2x + 3y + 7z = 8$$

$$2x + 6y + 4z = 2$$

$$3x + 7y + 8z = 7$$

Gauss-elimináció:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array} \right] & \begin{array}{l} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 3s_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2/(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_3 + 2s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \sim \\ & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 - 3s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Mivel a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így z szabad paraméter.

$$x = 7 - 5z, \quad y = -2 + z, \quad z \in \mathbb{R}$$

5. feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -4 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & | & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & -4 & | & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_2 / (-4) \\ \sim \\ \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -9 & -4 & | & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{s_3 + 9s_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & | & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_3 \cdot 2 \\ \sim \\ \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_1 - 2s_3 \\ \sim \\ s_2 - s_3/2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -4 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} s_1 - 3s_2 \\ \sim \\ \end{array} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}, \text{ így az inverz } \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$