Készülés a 2. zh-ra I.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. április 23.

Feladatok

1. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.
2. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.
3. Számítsuk ki az $1 + \sqrt{3}i$ komplex szám négyzetgyökeit. Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.
4. Számoljuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és minden sajátértékhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.
5. Számítsuk ki az $f(x, y) = ye^{xy}$ függvény iránymenti deriváltját a $P(0, 3)$ pontban a $\mathbf{v} = (2, 1)$ irányban.

1. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

1. Determináns kiszámolása:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 7 - 0 \cdot 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 7 = -2$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

$$\begin{bmatrix} -14 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

$$\begin{bmatrix} -14 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 11 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:

$$\begin{bmatrix} -14 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \\ 11 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

2. feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{s_3-3s_1 \\ s_4-s_1}}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{o_3-2o_1}{\overset{o_2-3o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{s_4+s_2}{\overset{s_3-2s_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{o_3+o_4}{\overset{o_2+2o_4}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel kettő darab egyes maradt, így a rang 2.

3. feladat

Számítsuk ki az $1+\sqrt{3}i$ komplex szám négyzetgyökeit. Az eredményt algebrai alakban adjuk meg.

Először áttérünk trigonometrikus alakra:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ$$

Tehát:

$$1+\sqrt{3}i = 2(\cos(60^\circ) + i\sin(60^\circ))$$

A két négyzetgyök:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) + i\sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right)\right) = \sqrt{2}(\cos(30^\circ) + i\sin(30^\circ)) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{60^\circ + 360^\circ}{2}\right) + i\sin\left(\frac{60^\circ + 360^\circ}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos(210^\circ) + i\sin(210^\circ)) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

4. feladat

Számoljuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és minden sajátértékhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 0 - 2\lambda - 0 - 2(-1-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 2 - 2\lambda + 2 + 2\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = \lambda\left(-\lambda^2 + \lambda + 2\right) =$$

$$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Tehát a sajátértékek $0, 2, -1$.

Sajátérték $\lambda = 0$-hoz:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_1/(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \overset{s_3-s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $x_3 = 0$, x_2 szabad paraméter, és $x_1 = -2x_2$. Egy sajátvektor: $(-2, 1, 0)$.

4. feladat folytatása

Sajátérték $\lambda = 2$-höz:

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_3+3s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_3+2s_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1+s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát x_3 szabad paraméter, és $x_1 = -x_3$ és $2x_2 = x_3$.
Egy sajátvektor: $(-2, 1, 2)$.

Sajátérték $\lambda = -1$-hez:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_3+2s_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megint x_3 szabad paraméter, és $x_1 = -x_3$ és $x_2 = -x_3$.
Egy sajátvektor: $(-1, -1, 1)$.

5. feladat

Számítsuk ki az $f(x,y) = ye^{xy}$ függvény iránymenti deriváltját a $P(0,3)$ pontban a $\mathbf{v} = (2,1)$ irányban.

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az adott pontban:

$$f'_x(x,y) = ye^{xy}y = y^2e^{xy} \qquad f'_x(0,3) = 9$$
$$f'_y(x,y) = 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy}x = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f'_y(0,3) = 1$$

Így a gradens a $(9,1)$ vektor.
A $\mathbf{v}$ vektort normáljuk:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált a két kiszámolt vektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(0,3) = (9,1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{19}{\sqrt{5}} \approx 8{,}50$$