Készülés a 2. zh-ra II.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. április 29.

Feladatok

1. Legfeljebb hány lineárisan független vektor választható ki az alábbiak közül?

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

3. Legyen $z_1 = 5 - i$ és $z_2 = 3 + 2i$. Mennyi $\dfrac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2|$?

4. Számoljuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjuk meg a sajátvektorokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel az $f(x, y) = \sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ függvény $P\left(\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$ pontbeli érintősíkját.

1. feladat

Legfeljebb hány lineárisan független vektor választható ki az alábbiak közül?

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Az alábbi mátrix rangja a kérdés:

$$\begin{bmatrix} 9 & 13 & 19 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{o_1 \leftrightarrow o_4}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 13 & 19 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 13 & 19 & 9 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underset{s_3+s_1}{\overset{s_2-5s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{o_3-2o_1 \\ o_4-3o_1}}{\overset{o_2-2o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{s_2-3s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{o_4+2o_2}{\overset{o_3-3o_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a rang 2, azaz két lineárisan független vektor választható ki.

2. feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & -8 \end{vmatrix} = (+3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -8 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-15) = 45$$

3. feladat

Legyen $z_1 = 5 - i$ és $z_2 = 3 + 2i$. Mennyi $\dfrac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2|$?

Először csak az osztást számoljuk ki:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-i}{3+2i} = \frac{5-i}{3+2i}\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{15-10i-3i+2i^2}{3^2+2^2} = \frac{13-13i}{13} = 1-i$$

Ezzel:

$$\frac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2| = 1 - i + 5 + i - \sqrt{3^2+2^2} = 6 - \sqrt{13} \approx 2{,}39$$

4. feladat

Számoljuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjuk meg a sajátvektorokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)+2) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 10\right),$$

aminek a gyöke a $\lambda_1 = 1$ és a $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$\lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektorok:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Így a sajátvektorok halmaza: $\{(5x, -3x, x) \mid x \neq 0\}$.

5. feladat

Írjuk fel az $f(x,y)=\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ függvény $P\left(\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$ pontbeli érintősíkját.

Kiszámoljuk a függvényt és a parciális deriváltakat az adott pontban:

$$f(x,y)=\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad f\left(\pi,\tfrac{4}{3}\pi\right)=\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_x(x,y)=\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f'_x\left(\pi,\tfrac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\frac{\pi}{\frac{5}{3}\pi}=\frac{3}{10}$$

$$f'_y(x,y)=\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f'_y\left(\pi,\tfrac{4}{3}\pi\right)=\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{5}{3}\pi}=\frac{2}{5}$$

Így az érintősík egyenlete:

$$z=\frac{3}{10}(x-\pi)+\frac{2}{5}\left(y-\tfrac{4}{3}\pi\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{10}x+\frac{2}{5}y-z$$

$$3{,}484=0{,}3x+0{,}4y-z$$