

# Matematika A2a - Vektorfüggvények elméleti kérdései

(BME GTK műszaki menedzser szak, 2024. tavasz)

## Első típusú improprius integrál: Végtelen tartományon korlátos függvény

Legyen  $f$  integrálható minden  $\beta > a$  esetén az  $[a, \beta]$ -n. Ha a  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx$  határérték létezik és véges, akkor az  $f$  függvény improprius integrálja létezik, és  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx$ .

## Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény I.

Legyen  $f$  integrálható  $[\alpha, b]$ -n minden  $\alpha \in (a, b)$  esetén, és  $f$  nem korlátos az  $[a, b]$ -n. Ha létezik és véges a  $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$  határérték, akkor  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$ .

## Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény II.

Legyen  $f$  integrálható  $[a, \beta]$ -n minden  $\beta \in (a, b)$  esetén, és  $f$  nem korlátos az  $[a, b]$ -n. Ha létezik és véges a  $\lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$  határérték, akkor  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$ .

## Az $\frac{1}{x^p}$ improprius integráljának konvergenciája

Az  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  integrál pontosan akkor konvergens, ha  $1 < p$ .

Az  $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$  integrál pontosan akkor konvergens, ha  $1 > p$ .

## Vektorok számmal való szorzása

A  $\lambda$  valós szám és a  $\mathbf{v}$  vektor szorzata az a vektor, melynek hossza  $|\lambda| \cdot |\mathbf{v}|$ , és iránya  $\mathbf{v}$ -vel megegyező, ha  $\lambda > 0$ , illetve iránya  $\mathbf{v}$ -vel ellentétes, ha  $\lambda < 0$ .

Ha a  $\mathbf{v}$  koordinátái  $(v_1, v_2, v_3)$ , akkor  $\lambda$ -val való szorzatának a koordinátái  $(\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$ .

A  $\lambda \mathbf{v}$  szorzat pontosan akkor  $\mathbf{0}$ , ha a  $\lambda = 0$  vagy  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Jelölés:  $\lambda \mathbf{v}$ .

## Skaláris szorzat

Az  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzata az  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$  szám, ahol  $\varphi$  jelöli az általuk bezárt szöveget. Ha az  $\mathbf{a}$  koordinátái  $(a_1, a_2, a_3)$ , míg a  $\mathbf{b}$  koordinátái  $(b_1, b_2, b_3)$ , akkor a skaláris szorzatuk  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ .

A skaláris szorzat pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Jelölés:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{ab}$  vagy  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ .

## Vektoriális szorzat

Az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  háromdimenziós vektorok vektoriális szorzata az a  $\mathbf{c}$  vektor, melyre a következők teljesülnek:

1.  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$ , ahol  $\varphi$  jelöli az  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{b}$  által bezárt szöveget;
2.  $\mathbf{c}$  merőleges az  $\mathbf{a}$ -ra és a  $\mathbf{b}$ -re;
3. az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok jobbrendezt alkotnak.

Ha az  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .

A vektoriális szorzat pontosan akkor  $\mathbf{0}$ , ha a két vektor párhuzamos.

Jelölés:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

## Vegyes szorzat

Az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  háromdimenziós vektorok vegyes szorzata az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  (vektoriális, majd skaláris) szorzat.

Geometriai jelentése: az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

A vegyes szorzat pontosan akkor 0, ha a három vektor egy síkba esik.

Jelölés:  $\mathbf{abc}$ .

## Sík Hesse-féle normálegyenlete

Az  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  normálvektorú sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

## Pont és sík távolsága

A  $P(x_0, y_0, z_0)$  pont távolsága az  $ax + by + cz = d$  egyenletű síktól:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

## Egyenes paraméteres megadása

A  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  irányvektorú  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő egyenes paraméteres egyenlete

$$\{P + t\mathbf{v} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

## Egyenes egyenletrendszere a térben

Az  $(a, b, c)$  irányvektorú  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő egyenes egyenletrendszere

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

## Lineáris kombináció

A  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok lineárisan kombinációja  $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k$ , ahol  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  valós számok.

## Lineáris összefüggőség

A  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok lineárisan összefüggenek, ha vannak olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  számok úgy, hogy  $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$  és a  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  számok nem mindegyike 0.

## Lineáris függetlenség

A  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok lineárisan függetlenek, ha a  $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$  egyenlőségből következik, hogy  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ .

## Generátorrendszer

A  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok az  $\mathbb{R}^n$  tér generátorrendszere, ha minden  $\mathbf{v}$   $n$  dimenziós vektor előáll ezek lineáris kombinációjaként.

## Bázis

Az  $n$  dimenziós térben  $n$  darab lineárisan független vektort bázisnak nevezünk.

## Vektorrendszerek elemszáma

Egy  $n$  dimenziós térben ha

- $k$  darab lineárisan független vektor van, akkor  $k \leq n$ .
- $k$  darab vektor generátorrendszert alkot, akkor  $k \geq n$ .
- $k$  darab vektor bázist alkot, akkor  $k = n$ .

## Altér

Az  $\mathbb{R}^n$  tér egy  $V$  részhalmaza altér, ha teljesül a következő két feltétel:  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  esetén  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$  és  $\mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  esetén  $\lambda\mathbf{v} \in V$ .

## Generált altér

A  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  vektorok által generált altér azon vektorokból áll, melyek előállnak  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  lineáris kombinációjaként.

Jelölése:  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ .

## Homogén egyenletrendszer

Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer homogén, ha  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ .

Ilyenkor  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  mindig megoldás. Továbbá, ha  $\mathbf{x}$  megoldás, akkor  $\lambda\mathbf{x}$  is.

## Mátrix rangja

Egy mátrix rangja a benne található lineárisan független oszlopvektorok maximális száma. Ez ugyanannyi, mint a benne található lineárisan független sorvektorok maximális száma. A legnagyobb méretű nemnulla aldetermináns mérete szintén a mátrix rangjával egyezik meg.

### Lineáris egyenletrendszerek megoldásának mátrixrangos vizsgálata

Az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg (ahol  $\mathbf{A}$   $m \times n$ -es mátrix,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ), ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja megegyezik ( $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ ). A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja egymással és az ismeretlenek számával is megegyezik ( $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$ ).

Ha  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ , akkor  $n - r(\mathbf{A})$  változó tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

### Kifejtési tétel

Az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix determinánsát kiszámíthatjuk a következő formulák segítségével (sor, illetve oszlop szerinti kifejtés):

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$

ahol  $A_{i,j}$  jelöli az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sorának és  $j$ -edik oszlopának elhagyásával kapott  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát.

### Sor- és oszlopműveletek használhatósága

- egyenletrendszer megoldása (csak sorműveletek!)
- inverz számolása (első módszer) (csak sorműveletek!)
- mátrixok rangjának meghatározása
- determináns kiszámítása
  - csere:  $(-1)$ -es szorzó
  - sor/oszlop szorzásánál ki kell emelni a szorzót

### Inverz mátrix

A négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrix inverze az a  $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel jelölt mátrix, melyre  $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}_n$  és  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ .

### Inverz mátrix létezésének feltétele

A négyzetes  $\mathbf{A}$  mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0.

### Inverz mátrix kiszámítása

Ha az  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix invertálható, akkor az inverzének  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme:

$$(\mathbf{A}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i} / \det(\mathbf{A}),$$

ahol  $A_{j,i}$  jelöli az  $\mathbf{A}$  mátrix  $j$ -edik sorának és  $i$ -edik oszlopának elhagyásával kapott  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát.

Az inverz kiszámolására másik módszer a Gauss-elimináció.

### Mátrix sajátértéke, sajátvektora

Egy  $n \times n$ -es  $\mathbf{A}$  mátrix sajátértéke  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ha van olyan  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  nemnulla vektor, hogy  $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ . Ekkor a  $\mathbf{v}$ -t a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektornak nevezzük.

### Diagonális mátrix

Egy négyzetes mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlón kívül az összes eleme 0.

### Diagonalizálható mátrix

Egy  $\mathbf{A}$  mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik olyan invertálható  $\mathbf{C}$  mátrix, hogy a  $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$  mátrix diagonális.

### Diagonalizálhatóság feltétele

Egy  $n \times n$ -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van  $n$  darab lineárisan független sajátvektora.

## Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra

A  $z = a + bi$  komplex szám trigonometrikus alakja  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ahol  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  és

$$\varphi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a > 0, \\ \pi + \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0. \end{cases}$$

## Komplex számok $n$ -edik hatványa

A  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex szám  $n$ -edik hatványa:  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ .

## Komplex számok $n$ -edik gyökeinek meghatározása

A  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex szám  $n$ -edik gyökei a

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

komplex számok  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ -re.

## Algebra alaptétele

Egy polinomnak a komplex számok körében mindig van gyöke.

## Parciális derivált

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$  függvény az  $a = (a_1, \dots, a_m) \in D_f$  pontban  $x_i$  szerint parciálisan deriválható, ha az egyváltozós  $f_i: x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$  függvény az  $a_i$  helyen differenciálható. A

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

differenciálhányadost az  $f$  függvény  $x_i$  szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölése:  $f'_{x_i}(a)$  vagy  $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ .

## Íránymenti derivált

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  függvény  $P_0 \in D_f$  pontbeli  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$  iránymenti deriváltján ( $|\mathbf{e}| = 1$ ) a

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left| \overrightarrow{P_0 P} \right|},$$

határértéket értjük, ahol  $P$  úgy tart a  $P_0$ -hoz, hogy a  $\overrightarrow{P_0 P}$  vektor az  $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos és egyenlő állású. A határértéket így is felírhatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés:  $f'_{\mathbf{e}}(P_0)$ .

## Gradiens

Ha az  $n$  változós  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvénynek valamely  $P_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban mindegyik parciális deriváltja létezik, akkor az  $f$  függvény  $P_0$ -beli gradiensén a  $P_0$ -beli parciális deriváltakból álló  $n$  dimenziós vektort értjük:  $\text{grad} f(P_0) = (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$ .

## Jacobi-mátrix

Ha  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény minden komponensének mindegyik parciális deriváltja létezik valamely  $P \in \mathbb{R}^n$  pontban, akkor az  $f$  függvény  $P$ -beli Jacobi-mátrixán a komponens függvények parciális deriváltjaiból álló mátrixot értjük: az  $i$ -edik sorának a  $j$ -edik eleme az  $i$ -edik komponens függvény  $j$ -edik változója szerinti parciális deriváltja.

## Többváltozós függvény lokális minimuma

Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  többváltozós függvénynek az  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban lokális minimuma van, ha az  $\mathbf{x}_0$  pontnak van olyan  $D$  környezete, hogy  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x} \in D$  esetén.

### Többváltozós függvény lokális maximuma

Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  többváltozós függvénynek az  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban lokális maximuma van, ha az  $\mathbf{x}_0$  pontnak van olyan  $D$  környezete, hogy  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x} \in D$  esetén.

### Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel

Ha a kétváltozós valós függvénynek valamely pontban lokális szélsőértéke van, akkor abban a pontban létező parciális deriváltjai 0-k.

### Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elégséges feltétel

Ha az  $(x_0, y_0)$  pont valamely környezetében az  $f(x, y)$  függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az  $f(x, y)$  függvénynek lokális szélsőértéke van az  $(x_0, y_0)$  pontban. Ez a lokális szélsőérték minimum, ha  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , és maximum, ha  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ .

### Kétváltozós függvény nyeregpontra vonatkozó elégséges feltétel

Ha az  $(x_0, y_0)$  pont valamely környezetében az  $f(x, y)$  függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor az  $f(x, y)$  függvénynek nincs lokális szélsőértéke az  $(x_0, y_0)$  pontban (nyeregpont).

### Kétváltozós függvény feltételes lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel

Tegyük fel, hogy az  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényeknek az  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontban az elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a  $g$  függvény parciális deriváltjai nem mind 0-ák. Ha az  $f$  függvénynek az  $(x_0, y_0)$  pontban lokális szélsőértéke van a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett, akkor a megfelelő pontban az  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  Lagrange-függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

### Kétváltozós függvény feltételes lokális maximumára vonatkozó elégséges feltétel

Tegyük fel, hogy az  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontban az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek a másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény elsőrendű parciális deriváltjai léteznek. Ha egy  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  hármasra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és a

$$\begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix}$$

determináns pozitív, akkor az  $(x_0, y_0)$  pontban az  $f$  függvénynek lokális maximuma van a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett.

### Kétváltozós függvény feltételes lokális minimumára vonatkozó elégséges feltétel

Tegyük fel, hogy az  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontban az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek a másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény elsőrendű parciális deriváltjai léteznek. Ha egy  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  hármasra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és a

$$\begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix}$$

determináns negatív, akkor az  $(x_0, y_0)$  pontban az  $f$  függvénynek lokális minimuma van a  $g(x, y) = 0$  feltétel mellett.

## Numerikus sor

Tetszőleges  $(a_n)$  sorozatból képezett  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  formális összeget (numerikus) sornak nevezünk, melyet általában  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  alakban írunk.

## Numerikus sor konvergenciája

Egy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sort konvergensnek mondunk, ha az  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  részletösszezsorozat konvergens.

## Leibniz-sor

Olyan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor, melyben az  $a_n$  tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és 0-hoz tartanak. Minden Leibniz-sor konvergens.

## Hibabecslés Leibniz-soroknál

Ha  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  Leibniz-sor összege  $A$ , akkor tetszőleges  $N \in \mathbb{N}$ -re  $\left| A - \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq |a_{N+1}|$ .

## Harmonikus és hiperharmonikus sorok konvergenciája

A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  sor pontosan akkor konvergens, ha  $1 < a$ .

## Cauchy-féle integrálkritérium

Ha az  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvény monoton csökken és pozitív, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ sor konvergens} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ improprius integrál konvergens}$$

## Majoráns kritérium

Ha az  $(a_n)$  és  $(b_n)$  számsorozatokhoz található olyan  $N \in \mathbb{N}$ , hogy  $n > N$  esetén  $0 \leq a_n \leq b_n$  és a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sor konvergens, akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor is konvergens.

## Minoráns kritérium

Ha az  $(a_n)$  és  $(b_n)$  számsorozatokhoz található olyan  $N \in \mathbb{N}$ , hogy  $n > N$  esetén  $0 \leq a_n \leq b_n$  és a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor divergens, akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sor is divergens.

## Gyökkritérium

A pozitív tagú  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , és divergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ .

## Hányados kritérium

A pozitív tagú  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , és divergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ .

## Abszolút konvergencia

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor abszolút konvergens, ha a  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  sor konvergens.

## Feltételes konvergencia

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.