10. gyakorlat

Feltételes szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. május 9.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x,y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x,y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x,y) = x^2 + y - 1$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x,y,\lambda) = x + y + \lambda\left(x^2 + y - 1\right)$$

A parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 1 + \lambda \cdot 2x \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 1 + \lambda \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y - 1 \end{aligned}$$

A második egyenlet eltűnéséből: $\lambda = -1$. Ekkor az elsőből $x = \frac{1}{2}$. Végül a harmadikból $y = \frac{3}{4}$. Tehát egyetlen stacionárius pont az $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -1\right)$.

A feltétel y szerinti parciális deriváltja $\left(g'_y(x,y) = 1\right)$ soha nem tűnik el.

1. feladat (a) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, \lambda) &= 2\lambda \\ F''_{xy}(x, y, \lambda) &= 0 \\ F''_{yy}(x, y, \lambda) &= 0 \\ g'_x(x, y) &= 2x \\ g'_y(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda,$$

ami az $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -1\right)$ stacionárius pontban pozitív, így az feltételes maximumhely.

A feltételes (lokális) maximum értéke: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

1. feladat (a) másik megoldás

Határozzuk meg az $f(x,y) = x + y$ kétváltozós függvény $x^2 + y = 1$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A feltételből kifejezhetjük az y-t: $y = 1 - x^2$. Ezt a függvénybe beírva egy egyváltozós függvényt kapunk:

$$g(x) = f\big(x, 1 - x^2\big) = x + 1 - x^2$$

Ennek a szélsőértékeit az egyváltozós analízis segítségével határozhatjuk meg:

$$g'(x) = 1 - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}$$

lehetséges szélsőértékhely. Mivel

$$g''(x) = -2 \quad \Longrightarrow \quad g''\left(\tfrac{1}{2}\right) = -2 < 0,$$

ez lokális maximumhely.

Ha $x = \frac{1}{2}$ akkor $y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x,y) = x + y - 8$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 3xy + y^2 + \lambda(x + y - 8)$$

A parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + 3y + \lambda \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 3x + 2y + \lambda \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 8 \end{aligned}$$

Ezek eltűnése egy lineáris egyenletrendszert ad x, y, λ-ra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & 1 & -24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & -40 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right]$$

Tehát a $(4, 4, -20)$ az egyetlen stacionárius pont.
A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja 1, így az nem fog eltűnni.

1. feladat (b) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ kétváltozós függvény $x + y = 8$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, \lambda) &= 2 \\ F''_{xy}(x, y, \lambda) &= 3 \\ F''_{yy}(x, y, \lambda) &= 2 \\ g'_x(x, y) &= 1 \\ g'_y(x, y) &= 1 \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 3 - 2 - 2 = 2 > 0,$$

így a $(4, 4)$ feltételes lokális maximumhely.

A feltételes lokális maximum értéke: $f(4, 4) = 80.$

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A $g(x,y) = xy - 3$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 3)$$

A parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2x + \lambda y \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda x \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= xy - 3 \end{aligned}$$

Az első eltűnéséből $x = -\frac{\lambda y}{2}$, amit a másodikba helyettesítve: $2y - \frac{\lambda^2 y}{2} = 0$, amiből $y = 0$ vagy $\lambda^2 = 4$, azaz $\lambda = \pm 2$.

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$, és így nem teljesül a feltétel.

Ha $\lambda = +2$, akkor $x = -y$, de ekkor nem teljesülhet a feltétel.

Ha $\lambda = -2$, akkor $x = y$, és a feltételből $x = y = \pm\sqrt{3}$.
Tehát két stacionárius pont van: $\big(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2\big)$ és $\big(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\big)$.

A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja csak az origóban tűnik el.

1. feladat (c) folytatás

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ kétváltozós függvény $xy = 3$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x, y, \lambda) &= 2 \\ F''_{xy}(x, y, \lambda) &= \lambda \\ F''_{yy}(x, y, \lambda) &= 2 \\ g'_x(x, y) &= y \\ g'_y(x, y) &= x \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda xy - 2y^2 - 2x^2,$$

ami mindkét stacionárius pontban $-24 < 0$, így mindkettő feltételes lokális minimumhely.

A feltételes lokális minimum értéke: $f\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = f\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = 6.$

2. feladat

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

2. feladat

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

Az $f(x, y) = xy$ függvény maximumát keressük, ha $x + y = 10$, azaz a $g(x, y) = x + y - 10$ függvény nullhelyein.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 10)$$

A parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= y + \lambda \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x + \lambda \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= x + y - 10 \end{aligned}$$

Az első két egyenletből $y = -\lambda$, illetve $x = -\lambda$. Ezeket a harmadikba helyettesítve: $-2\lambda - 10 = 0$, azaz $\lambda = -5$, és így $x = y = 5$. Az egyetlen stacionárius pont $(5, 5, -10)$.

A feltétel mindkét változó szerinti parciális deriváltja 1, ami nem tűnik el.

2. feladat folytatás

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x,y,\lambda) &= 0 \\ F''_{xy}(x,y,\lambda) &= 1 \\ F''_{yy}(x,y,\lambda) &= 0 \\ g'_x(x,y) &= 1 \\ g'_y(x,y) &= 1 \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

így az $(5,5)$ pont feltételes lokális maximumhely. Meggondolható, hogy globális is.

A feltételes maximum értéke: $f(5,5) = 25$.

2. feladat másik megoldás

Ha két szám összege 10, akkor legfeljebb mennyi a szorzatuk?

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 5 \quad \Longrightarrow \quad xy \leq 25,$$

ahol egyenlőség pontosan $x = y$ esetén van, amikor $x = y = 5$.

3. feladat

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

3. feladat

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

Az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény helyett kereshetjük az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény minimumát, ami kicsit egyszerűbb.
Az $y = 3x - 10$ egyenes pontjai pontosan a $g(x, y) = 3x - y - 10$ függvény nullhelyei.

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x - y - 10)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x + 3\lambda$$
$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y - \lambda$$
$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = 3x - y - 10$$

Az első két egyenletből $x = -\frac{3}{2}\lambda$, illetve $y = \frac{\lambda}{2}$. Ezeket a harmadikba helyettesítve: $3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\lambda\right) - \frac{\lambda}{2} - 10 = 0$, azaz $\lambda = -2$, és így $x = 3$ és $y = -1$. Az egyetlen stacionárius pont $(3, -1, -2)$.

A feltétel parciális deriváltjai nem tűnnek el.

3. feladat folytatás

Az $y = 3x - 10$ egyenesnek mely pontja van legközelebb az origóhoz?

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} F''_{xx}(x,y,\lambda) &= 2 \\ F''_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 \\ F''_{yy}(x,y,\lambda) &= 2 \\ g'_x(x,y) &= 3 \\ g'_y(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -18 - 2 = -20 < 0,$$

így a $(3,-1)$ pont feltételes lokális minimumhely. Meggondolható, hogy globális is.

Tehát a kérdéses egyenesnek a $(3,-1)$ pontja van legközelebb az origóhoz.

Bónuszfeladat

Adott egy háromszög egyik szöge és a vele szemköztes oldala. Hogyan válasszuk meg a többi oldalát, hogy a területe maximális legyen?

Házi feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény $x + y = 6$ feltétel melletti feltételes szélsőértékeit.

Házi feladat végeredménye

$(3, 3)$ pontban feltételes miniumhely ($\lambda = -6$), melynek értéke: 18.