11. gyakorlat

Sorozatok és sorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. május 16.

1. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\dfrac{5n^2 - 3n - 1}{n + 3}$ sorozat határértékét.

1. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\dfrac{5n^2 - 3n - 1}{n+3}$ sorozat határértékét.

A törtet n-nel egyszerűsítve:

$$\frac{5n^2 - 3n - 1}{n+3} = \frac{5n - 3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \to \frac{+\infty - 3 + 0}{1+0} = +\infty$$

1. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sqrt[n]{n+3}$ sorozat határértékét.

1. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sqrt[n]{n+3}$ sorozat határértékét.

A rendőrelvet fogjuk használni, amihez alulról és felülről becsülünk:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{n} & \leq & \sqrt[n]{n+3} & \leq & \sqrt[n]{4n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1, \end{array}$$

mert $\sqrt[n]{4n} = \sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$. Így a rendőrelv szerint $\sqrt[n]{n+3} \to 1$.

1. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sorozat határértékét.

1. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ sorozat határértékét.

Gyöktelenítünk:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{\infty} = 0$$

1. feladat (d)

Állapítsuk meg a $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ sorozat határértékét.

1. feladat (d)

Állapítsuk meg a $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ sorozat határértékét.

A számlálót és a nevezőt is gyöktelenítjük:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}} \to \frac{2}{\infty} = 0$$

A nevezőnél felhasználhattuk volna az előző részfeladat eredményét is.

1. feladat (e)

Állapítsuk meg a $\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$ sorozat határértékét.

1. feladat (e)

Állapítsuk meg a $\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$ sorozat határértékét.

A törtet $3n$-nel egyszerűsítve, majd felhasználva, hogy $\left(1+\frac{q}{n}\right)^n \to e^q$:

$$\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \left(\frac{1-\frac{1}{3n}}{1+\frac{2}{3n}}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n}\right)^2 \to \left(\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = e^{-2}$$

Másik megoldási lehetőség:

$$\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{2n} = \left(\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^{\frac{2n}{3n+2}} \to \left(e^{-3}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{-2}$$

2. feladat

Írjuk fel a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sor részletösszeg-sorozatát, konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, akkor mi a sor összege?

2. feladat

Írjuk fel a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sor részletösszeg-sorozatát, konvergens-e ez a sorozat? Ha igen, akkor mi a sor összege?

A részletösszeg-sorozat:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^N = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

mert $q^n \to 0$, ha $|q| < 1$. Így a sor konvergens, és az összege $\frac{3}{2}$.

3. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^{n+1}}$ sor összegét, ha konvergens.

3. feladat (a)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^{n+1}}$ sor összegét, ha konvergens.

Az előző feladat módszerével belátható, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

A feladat sorát kicsit alakítva ilyen alakra tudjuk hozni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5 \cdot 5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

3. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n}}$ sor összegét, ha konvergens.

3. feladat (b)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n}}$ sor összegét, ha konvergens.

Ebben az esetben az összegzés csak $n = 1$-től megy, ilyenkor a következő összefüggést használhatjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1.$$

Ezzel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

3. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} + 3^n}{6^{n+1}}$ sor összegét, ha konvergens.

3. feladat (c)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}}$ sor összegét, ha konvergens.

A sort két sor összegére bontjuk, és alkalmazzuk az előzőekben tanultakat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}+3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{6^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot 2^{-1}}{6^n \cdot 6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n \cdot 6} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{7}{12}$$

3. feladat (d)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n)^2}$ sor összegét, ha konvergens.

3. feladat (d)

Állapítsuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n)^2}$ sor összegét, ha konvergens.

Előadáson szerepelt, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ezzel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Bónuszfeladat

Mennyi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$?

Házi feladatok

1. Számoljuk ki az $a_n = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{n+1}$ sorozat határértékét.
2. Számoljuk ki a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^{n-1}}{5^n}$ sor összegét.

Házi feladatok végeredményei

1. e^5
2. 1