1. gyakorlat

Improprius integrálok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. február 15.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} (x-1)^{-3}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{(x-1)^{-2}}{-2}\right]_3^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{(b-1)^{-2}}{-2} - \frac{(3-1)^{-2}}{-2} = \frac{1}{8}$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x}\ \mathrm{d}x$ improprius integrált.

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-2x} & g(x) = \frac{e^{-2x}}{-2} \end{array}$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{be^{-2b}}{2} - \frac{e^{-2b}}{4} - \left(-\frac{0e^{-2\cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2\cdot 0}}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

ahol felhasználtuk a L'Hospital-szabály alábbi alkalmazását:

$$\lim_{b\to+\infty} be^{-2b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^{2b}} \rightsquigarrow \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^{2b}\cdot 2} = 0$$

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} \, \mathrm{d}x$ improprius integrált.

1. feladat (c)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, így

$$\frac{6}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A és B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$\begin{aligned} 6 &= A(x+2)+B(x-1) \\ 6 &= (A+B)x+2A-B, \end{aligned}$$

amiből $A+B=0$ és $2A-B=6$. Ebből $A=2, B=-2$, és így

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C = \\ = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1. feladat (c) folytatás

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

Kiszámoltuk, hogy

$$\int \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_2^{b} \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\left[2\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]_2^b =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} 2\ln\left|\frac{b-1}{b+2}\right| - 2\ln\left|\frac{2-1}{2+2}\right| = -2\ln\left(\frac{1}{4}\right) =$$
$$= -2\ln\left(2^{-2}\right) = 4\ln 2 \approx 2{,}77,$$

mert

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b-1}{b+2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{b}}{1+\frac{2}{b}} = 1.$$

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int\limits_{-9}^{0} \frac{1}{\sqrt{9+x}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

2. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int\limits_{-9}^{0} \frac{1}{\sqrt{9+x}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

A függvény -9 környezetében nem korlátos, így azt kell határértékkel közelíteni:

$$\int\limits_{-9}^{0} \frac{1}{\sqrt{9+x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -9+} \int\limits_{a}^{0} (9+x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -9+} \left[\frac{(9+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to -9+} \left(2\cdot(9+0)^{\frac{1}{2}} - 2\cdot(9+a)^{\frac{1}{2}}\right) = 6$$

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

2. feladat (b)

Számítsuk ki a $\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}}\ \mathrm{d}x$ improprius integrált.

Ebben az esetben a 4-et kell határértékkel közelíteni, majd használjuk a lineáris helyettesítési szabályt:

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(8-2x)^4}}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to 4-} \int\limits_0^b (8-2x)^{-\frac{4}{3}}\ \mathrm{d}x = \lim_{b\to 4-} \left[\frac{1}{-2}\cdot\frac{(8-2x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 4-}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8-2x}}\right]_0^b = \lim_{b\to 4-}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8-2b}} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = +\infty,$$

így ez az improprius integrál divergens.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

2. feladat (c)

Számítsuk ki a $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

Először a határozatlan integrált számítjuk ki.
Visszavezetjük egy már ismertre (majd lineáris helyettesítés):

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Ezzel az improprius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2-}\int\limits_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 2-}\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b =$$
$$= \lim_{b\to 2-}\arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3. feladat

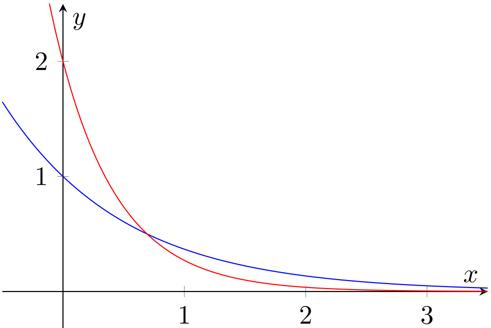
Legyen $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, +\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = 1$ minden $\lambda > 0$ számra.

3. feladat

Legyen $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ahol $\lambda > 0$ adott paraméter. Mutassuk meg, hogy az f_λ grafikonja alatti terület a $[0, +\infty)$ intervallumon minden $\lambda > 0$ esetén 1-gyel egyenlő, azaz $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, \mathrm{d}x = 1$ minden $\lambda > 0$ számra.

Az improprius integrál (felhasználva, hogy $(e^{-\lambda x})' = e^{-\lambda x}(-\lambda)$):

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} -e^{-\lambda b} - (-1) = 1$$



Bónuszfeladat

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a,b] \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Számítsuk ki a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.$

Házi feladatok

Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

(a) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} e^{-5x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

Házi feladatok végeredményei

(a) $\dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$

(b) $\dfrac{e^{-10}}{5} \approx 9{,}08 \cdot 10^{-6}$

(c) $\dfrac{3}{2} = 1{,}5$