

### 3. gyakorlat

## Lineáris összefüggőség és mátrixok

1. Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok?

$$(a) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét. Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix  $a_{ij}$  eleme jelentse az  $i$ -edik gyárban egy nap alatt előállított  $j$ -edik termék számát. A

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor  $j$ -edik koordinátája a  $j$ -edik termék egységára. Mi a jelentése a következő szorzatoknak?

(a)  $\mathbf{A}\mathbf{p}$ ;

(b)  $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ , ahol  $\mathbf{e}_i$  a standard bázisvektor;

(c)  $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$ , ahol  $\mathbf{1}$  az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1.

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, amelynek koordinátái megadják

(d) az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit;

(e) az  $i$ -edik gyár által gyártott termékek számát.

## Bónuszfeladatok

4. Tekintsük az  $\mathbb{R}^3$  tér

$$\mathbf{a} = (1, 3, 4), \quad \mathbf{b} = (2, 7, 2), \quad \mathbf{c} = (-1, 2, 1)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az  $\mathbf{x} = (-3, 1, -2)$  vektor benne van-e a vektorok által generált  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$  altérben.

5. Igazoljuk, hogy az  $\mathbb{R}^4$  tér

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4\}$$

részhalmaza egy altér  $\mathbb{R}^4$ -ben. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

6. Határozzuk meg mindazon  $\mathbf{B}$  mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők.

## Házi feladat

7. Egy kereskedelmi cég  $n$  féle terméket forgalmaz  $m$  boltjában. Az  $\mathbf{A}$  mátrix  $a_{ij}$  eleme jelentse a  $j$ -edik termék  $i$ -edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A  $\mathbf{p}$  vektor  $p_i$  koordinátája jelölje az  $i$ -edik termék egységárát. Az  $\mathbf{A}$  mátrix, a  $\mathbf{p}$  vektor, az  $\mathbf{e}_i$  (a standard bázisvektor), valamint az  $\mathbf{1}$  (az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

- (a) a havi bevételt boltonként;
- (b) az  $r$ -edik bolt havi bevételét;
- (c) az  $r$ -edik boltban a  $q$ -adik áruból eladott mennyiséget;
- (d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;
- (e) a havi összbevételt.