5. gyakorlat

Mátrixok rangja és determinánsa

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. március 14.

1. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

1. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixot, például így:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \underset{s_3+3s_1}{\overset{s_2+2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{o_4+o_1}{\overset{o_3+2o_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az utolsó mátrixban csak 0 és 1 szerepel, és minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy darab egyes. Így a mátrix rangja az itt levő egyesek száma, ami 2.

2. feladat

Hány lineárisan független vektor választható ki a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok közül?

2. feladat

Hány lineárisan független vektor választható ki a

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok közül?

A kiválasztható lineárisan független vektorok maximális számához az általuk alkotott mátrix rangját kell kiszámolni az előző feladathoz hasonlóan:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \underset{o_3+3o_1}{\overset{o_2+2o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3-s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underset{o_3-4o_4}{\overset{o_2-2o_4}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_2/5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_3-11o_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 3, így ennyi lineárisan független vektort választhatunk ki.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

3. feladat (a)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

A 2×2-es determinánst az elemekből egyszerűen számolhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

3. feladat (b)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

A 3×3-as determinánst is számolhatjuk közvetlenül (Sarrus-szabály):

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1\cdot4\cdot4+(-2)\cdot5\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-3\cdot4\cdot1-1\cdot5\cdot1-(-2)\cdot(-1)\cdot4 =$$

$$= 16 - 10 - 3 - 12 - 5 - 8 = -22$$

Kicsit egyszerűbb, ha sortranszformáció után kifejtjük az első oszlop szerint:

$$\left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{matrix}\right| \overset{s_2+s_1}{\underset{s_3-s_1}{=}} \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}\right| = 1 \cdot \left|\begin{matrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right| = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 8 \cdot 3) = -22$$

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

3. feladat (c)

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsát.

Sortranszformációkat végzünk:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{=} (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{s_3-s_1 \\ s_4-2s_1}}{\overset{s_2-3s_1}{=}}$$

$$(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{s_2\leftrightarrow s_3}{=} (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \underset{s_4-s_2}{\overset{s_3+s_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{s_3/2}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{s_4+2s_3}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 2\cdot 23 = 46$$

4. feladat

Milyen p valós paraméterek esetén invertálható az alábbi mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{bmatrix}$$

Egy alkalmas p esetére írjuk fel a mátrix inverzét is.

4. feladat

Milyen p valós paraméterek esetén invertálható az alábbi mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{bmatrix}$$

Egy alkalmas p esetére írjuk fel a mátrix inverzét is.

Mivel egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0, így számoljuk ki a determinánst a p függvényében:

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & p \end{array}\right| \begin{array}{rr} 2 & -5 \\ -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{array} = 6p + 75 + 81 - 81 - 90 - 5p = p - 15$$

Tehát $p \neq 15$ esetén invertálható ez a mátrix.

Az inverzet $p = 17$ esetén számoljuk ki az aldeterminánsos módszerrel.

4. feladat – inverz kiszámítása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:
   $\det \mathbf{A} = p - 15 = 17 - 15 = 2$
2. Aldeterminánsok kiszámolása:
$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -4 & 7 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
3. A kapott mátrixot transzponáljuk:
$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:
$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
5. Végül leosztjuk a determinánssal:
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 17 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

5. feladat

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ -x + 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

5. feladat

Oldjuk meg Cramer-szabállyal a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= -4 \\ -x + 3y + 5z &= 10 \end{aligned}$$

Az együtthatómátrix determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 6 + 6 - 1 - 20 - (-27) = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \\ 10 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ -1 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-3}{3} = -1,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 10 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Házi feladatok

Hány lineárisan független vektor választható ki az alábbi vektorok közül?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok végeredménye

2 lineárisan független vektor választható ki

1448