8. gyakorlat

Többváltozós függvények deriválása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. április 18.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

1. feladat (a)

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

A parciális deriválásnál a többi változót konstansnak tekintjük:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 5 \cdot 2xy - y = 3x^2 - 10xy - y$$
$$f'_y(x, y) = -5x^2 - x + 3 \cdot 6y^5 = -5x^2 - x + 18y^5$$

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x, y) = e^{x^2+y^3}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

1. feladat (b)

Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{x^2+y^3}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

Összetett függvény, így az egyváltozós láncszabályt alkalmazzuk:

$$f'_x(x,y) = e^{x^2+y^3} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^3}$$
$$f'_y(x,y) = e^{x^2+y^3} \cdot 3y^2 = 3y^2e^{x^2+y^3}$$

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x, y, z) = xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

1. feladat (c)

Határozzuk meg az $f(x,y,z) = xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.

$$f'_x(x,y,z) = e^{-y}\mathrm{tg}(z)$$
$$f'_y(x,y,z) = -xe^{-y}\mathrm{tg}(z)$$
$$f'_z(x,y,z) = xe^{-y}\frac{1}{\cos^2(z)}$$

2. feladat (a)

Írjuk fel a $P(1, -2)$ pontban az $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ felület érintősíkját.

2. feladat (a)

Írjuk fel a $P(1,-2)$ pontban az $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ felület érintősíkját.
Egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0)-beli érintősíkjának egyenlete:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x + 3y, && \text{ami a } P \text{ pontban } f'_x(1,-2) = 2 - 6 = -4 \\ f'_y(x,y) &= 3x + 2y, && \text{ami a } P \text{ pontban } f'_y(1,-2) = 3 - 4 = -1 \\ f(1,-2) &= 1 - 6 + 4 = -1 \end{aligned}$$

Így a P ponthoz tartozó érintősík egyenlete:

$$z = (-4)(x-1) + (-1)(y+2) - 1$$
$$4x + y + z = 1$$

2. feladat (b)

Írjuk fel a $P(-2,3)$ pontban az $f(x,y) = x\ln(x+y)$ felület érintősíkját.

2. feladat (b)

Írjuk fel a $P(-2,3)$ pontban az $f(x,y) = x\ln(x+y)$ felület érintősíkját.

$f'_x(x,y) = \ln(x+y) + x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_x(-2,3) = 0 + (-2)\cdot 1 = -2$

$f'_y(x,y) = x\dfrac{1}{x+y}$, ami a P pontban $f'_y(-2,3) = (-2)\cdot 1 = -2$

$f(-2,3) = -2\cdot 0 = 0$

Így a P-beli érintősík egyenlete:

$$z = (-2)(x+2) + (-2)(y-3) + 0$$
$$2x + 2y + z = 2$$

3. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15$ függvény iránymenti deriváltját az $P(3, 2)$ pontban és $\mathbf{v} = (2, -4)$ irányban.

3. feladat (a)

Számítsuk ki az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15$ függvény iránymenti deriváltját az $P(3,2)$ pontban és $\mathbf{v} = (2,-4)$ irányban.

Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat és azok értékét a $P(3,2)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 4x - 3y & \qquad f'_x(3,2) &= 12 - 6 = 6 \\ f'_y(x,y) &= -3x + 2y & \qquad f'_y(3,2) &= -9 + 4 = -5 \end{aligned}$$

Így a függvény gradiense a P-ben: $\operatorname{grad} f(P) = (6,-5)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \operatorname{grad} f(P) \cdot \mathbf{e} = (6,-5) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \approx 7{,}155$$

3. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x,y) = \mathrm{tg}(2x+y)$ függvény iránymenti deriváltját az $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontban és $\alpha = 225^\circ$ irányban.

3. feladat (b)

Számítsuk ki az $f(x,y) = \mathrm{tg}(2x+y)$ függvény iránymenti deriváltját az $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ pontban és $\alpha = 225°$ irányban.

Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat és azok értékét a P pontban:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)} \cdot 2 \qquad f'_x(P) = 8 \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)} \qquad f'_y(P) = 4$$

Így a függvény gradiense a P-ben: $\mathrm{grad} f(P) = (8,4)$. Ebben az esetben vektor helyett szöggel van megadva az irány. Ez azt jelenti, hogy az irányvektor ezt a szöget zárja be az x tengellyel, azaz az irányvektor:

$$\mathbf{e} = (\cos 225°, \sin 225°) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke ebben az esetben is a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \mathrm{grad} f(P) \cdot \mathbf{e} = (8,4) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

4. feladat

Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ függvény grafikonjára a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

4. feladat

Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ függvény grafikonjára a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

A vízcsepp nyilván arra fog elindulni, amerre a leginkább lejt a felület, azaz amerre a legkisebb az iránymenti derivált, azaz a gradienssel ellentétes irányba. Számoljuk ki a gradienst! A parciális deriváltak kiszámításához a függvényt $f(x,y) = y^3 e^{-2x-1}$ alakba írjuk.

$$f'_x(x,y) = y^3 e^{-2x-1}(-2)$$
$$f'_y(x,y) = 3y^2 e^{-2x-1}$$

A $P = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban az értékük: $f'_x(P) = -2$, illetve $f'_y(P) = 3$. Így $\mathrm{grad} f(P) = (-2, 3)$, a csepp az ezzel ellentétes irányba, azaz a $(2, -3)$ irányba fog elindulni. A maximális meredekség a gradiens irányában van, értéke a gradiens vektor hossza, ami

$$|(-2,3)| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

5. feladat

Írjuk fel az $f(x, y, z) = (x + 2yz, \sqrt{x} + \ln z)$ függvény $(4, 3, 1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.

5. feladat

Írjuk fel az $f(x, y, z) = (x + 2yz, \sqrt{x} + \ln z)$ függvény $(4, 3, 1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.

Az f függvény komponensfüggvényei:

$$f_1(x, y, z) = x + 2yz$$
$$f_2(x, y, z) = \sqrt{x} + \ln z$$

A Jacobi-mátrix ezen függvények parciális deriváltjaiból áll: a sorokban a megfelő komponens függvények parciális deriváltjai, míg az oszlopokban a megfelelő változó szerinti parciális deriváltak vannak. Például a Jacobi-mátrix első sorának második eleme az első komponensfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja, azaz $f'_{1y}(x, y, z) = 2z$. Így a Jacobi-mátrix a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2z & 2y \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$$

Ez a $(4, 3, 1)$ pontban a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. feladat

Legyen $f(x,y) = 3x^2y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg a $t \mapsto f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

6. feladat

Legyen $f(x,y) = 3x^2y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg a $t \mapsto f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

Az f függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$$

Míg a $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t), \ln(t))$ függvény (nevezzük $g(t)$-nek) Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

Az $f \circ g$ összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t),$$

ahol a $\cdot$ mátrixszorzást jelent. Ez az esetünkben:

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \begin{bmatrix} 6\sin(t)\ln(t) & 3\sin^2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix} =$$

$$= 6\sin(t)\ln(t)\cos(t) + \frac{3\sin^2(t)}{t}$$

Az 1×1-es mátrixot azonosíthatjuk az egyetlen elemével.

Bónuszfeladat

Az $f(x, y) = \ln(xy)$ függvény grafikonjának mely pontjában lesz az érintősík párhuzamos az $x + y + z = 1$ egyenletű síkkal?

Házi feladatok

1. Számítsuk ki az $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait.
2. Írjuk fel az $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{e^{y-1}}$ függvény érintősíkját a $P(3, 1)$ pontban.
3. Legyen $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Számítsuk ki a $P(4, 3)$ pontban az iránymenti derivált minimumát és maximumát.

Házi feladatok végeredményei

1. $$f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}$$
   $$f'_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2}$$
2. $$z = \frac{1}{2}(x-3) - (y-1) + 1$$
3. minimum: $-\sqrt{5}$, maximum: $\sqrt{5}$