9. gyakorlat

Lokális szélsőértékek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2024. május 2.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$ függvény lokális szélsőértékeit.

1. feladat (a)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2$ függvény lokális szélsőértékeit.

Először kiszámoljuk a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 8x + 2y$$
$$f'_y(x, y) = 2x + 10y$$

Megkeressük azokat a pontokat (stacionárius pontok), ahol mindkettő nulla:

$$\begin{aligned} 8x + 2y &= 0 \qquad \Rightarrow y = -4x \\ 2x + 10y &= 0 \qquad \Rightarrow -38x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Egyetlen stacionárius pont van, a $(0, 0)$.
Még meg kell nézni, hogy ez valóban lokális szélsőérték-e, amihez a Hesse-féle determinánst kell felírni a másodrendű parciális deriváltakból.

$$f''_{xx}(x, y) = 8 \qquad f''_{xy}(x, y) = 2 \qquad f''_{yy}(x, y) = 10$$

Ebből a Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 8 \cdot 10 - 2^2 = 76,$$

ami minden pontban pozitív, így a $(0, 0)$-ban van lokális szélsőérték, és mivel $f''_{xx}(0, 0) = 8$ pozitív, így lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(0, 0) = 2$.

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$ függvény lokális szélsőértékeit.

1. feladat (b)

Határozzuk meg a $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy$ függvény lokális szélsőértékeit.

Ugyanazokat a lépéseket kell megcsinálnunk, mint az (a) feladatban:

$$\begin{array}{lll} f'_x(x,y) = 2xy + 2y & 2xy + 2y = 0 & \Rightarrow 2y(x+1) = 0 \\ f'_y(x,y) = 4y^3 - 3 + x^2 + 2x & 4y^3 - 3 + x^2 + 2x = 0 & y = 0 \quad x = -1 \end{array}$$

$y = 0$ esetén a második egyenlet $-3 + x^2 + 2x = 0$, aminek a két gyöke 1 és -3.
$x = -1$ esetén a második egyenlet $4y^3 - 3 + 1 - 2 = 0$, azaz $y^3 = 1$, azaz $y = 1$.
Tehát három stacionárius pont van: $(1, 0)$, $(-3, 0)$ és $(-1, 1)$.
A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2y \qquad f''_{xy}(x,y) = 2x + 2 \qquad f''_{yy}(x,y) = 12y^2$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = 2y \cdot 12y^2 - (2x+2)^2 = 24y^3 - (2x+2)^2$$

$(1, 0)$-ban: $24 \cdot 0 - (2+2)^2 = -16 < 0$, ez nem lokális szélsőérték (nyeregpont)
$(-3, 0)$-ban: $24 \cdot 0 - (2 \cdot (-3) + 2)^2 = -16 < 0$, nem lok. szélsőérték (nyeregpont)
$(-1, 1)$-ban: $24 \cdot 1^3 - (2 \cdot (-1) + 2)^2 = 24 > 0$, ez lokális szélsőérték

Mivel $f''_{xx}(-1, 1) = 2 > 0$, ez lokális minimumhely.

A lokális minimum értéke: $f(-1, 1) = 1 - 3 + 1 - 2 = -3$.

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $f(x,y) = xy^3 - 12xy + x^2$ függvény lokális szélsőértékeit.

1. feladat (c)

Határozzuk meg a $f(x,y) = xy^3 - 12xy + x^2$ függvény lokális szélsőértékeit.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = y^3 - 12y + 2x$$
$$f'_y(x,y) = 3xy^2 - 12x = 3x(y^2 - 4)$$

Az y szerinti parciális derivált eltűnéséből $x = 0$ vagy $y = \pm 2$.

Ha $x = 0$, akkor $f'_x(x,y) = 0$-ból $y^3 - 12y = 0$, azaz $y = 0$ vagy $y = \pm 2\sqrt{3}$.

Ha $y = 2$, akkor $x = 8$, míg $y = -2$ esetén $x = -8$.

Így a stacionárius pontok: $(0,0), \left(0, 2\sqrt{3}\right), \left(0, -2\sqrt{3}\right), (8,2), (-8,-2)$.

A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \qquad f''_{xy}(x,y) = 3y^2 - 12, \qquad f''_{yy}(x,y) = 6xy$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = 2 \cdot 6xy - \left(3y^2 - 12\right)^2 = 12xy - \left(3y^2 - 12\right)^2$$

Behelyettesítve a stacionárius pontokat, az első három ($x = 0$) esetben negatív, így ezek nyeregpontok.

A $(8,2)$ és a $(-8,-2)$ lokális minimumhely ($f''_{xx}(x,y) = 2 > 0$), értékük -64.

1. feladat (d)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$ függvény lokális szélsőértékeit.

1. feladat (d)

Határozzuk meg a $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y$ függvény lokális szélsőértékeit.

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$
\begin{array}{lll}
f'_x(x, y) = 2 - 2x & \qquad 2 - 2x = 0 & \qquad x = 1 \\
f'_y(x, y) = 2 - e^y & \qquad 2 - e^y = 0 & \qquad y = \ln 2
\end{array}
$$

Tehát az egyetlen stacionárius pont az $(1, \ln 2)$.

$$
f''_{xx}(x, y) = -2 \qquad f''_{xy}(x, y) = 0 \qquad f''_{yy}(x, y) = -e^y
$$

A Hesse-determináns:

$$
f''_{xx}(x, y) f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-2) \cdot (-e^y) - 0^2 = 2e^y,
$$

ami az $(1, \ln 2)$ pontban $2e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4 > 0$, így itt van szélsőérték.
Mivel $f''_{xx}(1, \ln 2) = -2 < 0$, így ez lokális maximum.
A lokális maximum értéke:

$$
f(1, \ln 2) = 2 + 2 + 2 \ln 2 - 1 - 2 = 1 + 2 \ln 2 \approx 2{,}386
$$

2. feladat

Egy $V = 4{,}5\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsineget kelljen felhasználni?

2. feladat

Egy $V = 4{,}5\ \mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsineget kelljen felhasználni?

Legyen a téglatest oldalhosszai a, b, c (deciméterben mérve). Ekkor a térfogat

$$abc = 4{,}5, \text{ amiből } c = \frac{4{,}5}{ab}.$$

Ha a a leghosszabb oldal, akkor ha hosszában kötjük át a csomagot, akkor annak a hossza $2(a+b)$, és ha keresztben, akkor $2(b+c)$. Mivel keresztben kétszer kötjük át, így összesen

$$2(a+b) + 2 \cdot 2(b+c) = 2a + 6b + 4c$$

zsineg szükséges. Felhasználva, hogy $c = \dfrac{4{,}5}{ab}$, az

$$f(a,b) = 2a + 6b + 4c = 2a + 6b + 4 \cdot \frac{4{,}5}{ab} = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

függvényt kell minimalizálni.

2. feladat folytatás

$$f(a,b) = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_a(a,b) = 2 - \frac{18}{a^2b} \qquad 2 - \frac{18}{a^2b} = 0 \qquad a^2b = 9$$

$$f'_b(a,b) = 6 - \frac{18}{ab^2} \qquad 6 - \frac{18}{ab^2} = 0 \qquad ab^2 = 3$$

Ekkor $a^3b^3 = 27$, amiből $ab = \sqrt[3]{27} = 3$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{9}{3} = 3, \qquad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{3}{3} = 1, \qquad c = \frac{4{,}5}{ab} = \frac{4{,}5}{3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a,b) = \frac{36}{a^3b} \qquad f''_{ab}(a,b) = \frac{18}{a^2b^2} \qquad f''_{bb}(a,b) = \frac{36}{ab^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a,b)f''_{bb}(a,b) - (f''_{ab}(a,b))^2 = \frac{36}{a^3b} \cdot \frac{36}{ab^3} - \left(\frac{18}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{36^2 - 18^2}{a^4b^4} > 0$$

Mivel $f''_{aa}(3,1)$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó csomaghoz kell a lehető legkevesebb zsineg.

3. feladat

Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata $1\ \mathrm{m}^3$. Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

3. feladat

Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata 1 m^3. Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

Jelölje a téglatest oldalait a, b, c méterben mérve. Így a térfogat

$$abc = 1, \text{ amiből } c = \frac{1}{ab}.$$

Ha c a magasság, akkor az alaplap területe ab, míg az oldallapoké ac, illetve bc. Mivel két-két ugyanolyan oldallap van, így a felhasznált anyag:

$$f(a,b) = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a\frac{1}{ab} + 2b\frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

3. feladat folytatás

$$f(a,b) = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

Ennek elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_a(a,b) = b - \frac{2}{a^2} \qquad b - \frac{2}{a^2} = 0 \qquad a^2 b = 2$$

$$f'_b(a,b) = a - \frac{2}{b^2} \qquad a - \frac{2}{b^2} = 0 \qquad ab^2 = 2$$

Ekkor $a^3 b^3 = 4$, amiből $ab = \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$. Tehát

$$a = \frac{a^2 b}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a,b) = \frac{4}{a^3} \qquad f''_{ab}(a,b) = 1 \qquad f''_{bb}(a,b) = \frac{4}{b^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a,b) f''_{bb}(a,b) - (f''_{ab}(a,b))^2 = \frac{4}{a^3}\frac{4}{b^3} - 1 = \frac{16}{a^3 b^3} - 1,$$

ami a $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$ pontban $3 > 0$. Mivel $f''_{aa}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right) = 2 > 0$, így ez lok. minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó téglatesthez kell a lehető legkevesebb anyag.

Bónuszfeladat

A $z = 2x^2 + y^2$ felület és a $z = 5$ sík által határolt térrészbe a lehető legnagyobb térfogatú hasábot írjuk. Mekkora ennek a hasábnak a térfogata?

Házi feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit.
   (a) $f(x, y) = x^2y - 6xy + y^3 + 3y^2$;
   (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{27} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
2. Egy $1\ \mathrm{m}^3$ térfogatú téglatest alját és tetejét két rétegben, a többi oldalát egy rétegben befestjük. Milyen hosszúak legyenek a téglatest oldalélei, hogy a lehető legkevesebb festék kelljen ehhez?

Házi feladatok végeredménye

1. (a) $(3, 1)$-ban lokális minimum, értéke -5, míg
   $(3, -3)$-ban lokális maximum, értéke 27;
   (b) $(3, 3)$-ban lokális minimum, értéke 1.
2. Ha a, b, c jelöli az oldalakat, akkor $abc = 1$ és a festett felület nagysága:

$$4ab + 2bc + 2ac = 4ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$$

   A parciális deriváltak eltűnéséből $a = b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ és $c = \sqrt[3]{4}$.

   A Hesse-determináns ebben az esetben pozitív, így ez lokális szélsőérték, és mivel f''_{aa} pozitív, így lokális minimum.