1. vizsga megoldásvázlata

5. (a)

6.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2&1&3&2&2\\ 3&2&5&3&3\\ 2&4&0&6&8\\ 4&7&3&7&12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 3&2&5&3&3\\ 2&1&3&2&2\\ 4&7&3&7&12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 0&-4&5&-6&-9\\ 0&-3&3&-4&-6\\ 0&-1&3&-5&-4 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 0&1&-3&5&4\\ 0&-3&3&-4&-6\\ 0&-4&5&-6&-9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 0&1&-3&5&4\\ 0&0&-6&11&6\\ 0&0&-7&14&7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 0&1&-3&5&4\\ 0&0&1&-2&-1\\ 0&0&-6&11&6 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&3&4\\ 0&1&-3&5&4\\ 0&0&1&-2&-1\\ 0&0&0&-1&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&0&4\\ 0&1&-3&0&4\\ 0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 0$.

7. Mivel $i-1 = -1+i = \sqrt{2}(\cos(135°) + i\sin(135°))$, így
$(i-1)^{10} = (\sqrt{2})^{10}(\cos(1350°)+i\sin(1350°)) = 2^5(\cos(270°)+i\sin(270°)) = -32i$

8. Utolsó sor szerint kifejtve a karakterisztikus polinom:
$$(3-\lambda)\big((4-\lambda)(3-\lambda)-2\big) = (3-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)$$
Sajátértékek és -vektorok: $\lambda_1 = 3$: $(-2,-3,1)$, $\lambda_2 = 2$: $(1,-1,0)$, $\lambda_3 = 5$: $(2,1,0)$.

9.
$$f'_x(x,y) = \frac{1\cdot(1+xy) - x\cdot y}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2} \qquad f'_x(-2,1) = 1$$
$$f'_y(x,y) = \frac{0\cdot(1+xy) - x\cdot x}{(1+xy)^2} = \frac{-x^2}{(1+xy)^2} \qquad f'_y(-2,1) = -4$$
Így az érintősík ($f(-2,1) = 2$): $z = 1(x+2) - 4(y-1) + 2$ avagy $z = x - 4y + 8$.

10. $f'_x(x,y) = 2x + y - 2 \quad \Rightarrow 2 - 6y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 0$ vagy $y = \frac{1}{6}$
$f'_y(x,y) = x + 3y^2 - 1 \ \Rightarrow x = 1 - 3y^2$

Két stacionárius pont van: $(1,0), (\frac{11}{12}, \frac{1}{6})$. A Hesse-determináns:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 12y - 1,$$
mely az első stacionárius pontban negatív (nyeregpont), a másodikban pozitív, ami lokális minimumhely ($2 > 0$).

11. A gyökkritériumot használva:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{5} = \frac{1}{5} < 1,$$
így ez konvergens. Mivel pozitív tagú, abszolút konvergens is.