2. vizsga megoldásvázlata

5. (a)

6. $\overrightarrow{AB} = (3, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (-2, 3, 1)$, a vektoriális szorzatuk: $(-1, -3, 7)$, melynek hossza $\sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$. A kérdéses háromszög területe ennek a fele: $\sqrt{59}/2 \approx 3{,}84$.

7. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = 9$$

8. $z^5 + z^3 - 12z = z(z^4 + z^2 - 12) = z\left((z^2)^2 + z^2 - 12\right)$, így $z_1 = 0$, a többi gyököt abból kapjuk, hogy z^2-re megoldjuk a másodfokú egyenletet, melynek gyökei: 3 és -4. Ezek négyzetgyökei a megoldások: $z_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, $z_{4,5} = \pm 2i$.

9. $$f'_x(x, y) = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \cdot 2 \qquad f'_x(2, -3) = -3$$
$$f'_y(x, y) = \sqrt{2x+y} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+y}} \cdot 1 \qquad f'_y(2, -3) = -\frac{1}{2}$$

$\mathbf{e} = (\cos 120°, \sin 120°) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, így az iránymenti derivált

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \operatorname{grad} f(P) \cdot \mathbf{e} = \left(-3, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}067$$

10. $F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + \lambda(x - y - 2)$ Lagrange-függvénnyel:

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, \lambda) &= 2x + y + \lambda & &\Rightarrow & 2x + y + \lambda &= 0 \\ F'_y(x, y, \lambda) &= x + 2y - \lambda & &\Rightarrow & x + 2y - \lambda &= 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) &= x - y - 2 & &\Rightarrow & x - y &= 2, \end{aligned}$$

Az első kettőből $x + y = 0$, amivel a harmadikból $x = 1, y = -1$, és így $\lambda = -1$. $(1, -1, -1)$ az egyetlen stacionárius pont. A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 1 - 2 - 0 - 2 = -6 < 0,$$

azaz a stacionárius pont lokális minimumhely, értéke: $f(1, -1) = 1 - 1 + 1 = 1$.

11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} - 2^{2n+1}}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n/5}{(2^3)^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot 2}{(2^3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{5}{8}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{4}{8}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{5}{8}}{1 - \frac{5}{8}} - 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$