4. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6. A $(2,3,1)$ és $(0,3,2)$ vektorok vektoriális szorzata $(3,-4,6)$, a sík normálvektora. Egyenlete: $3x-4y+6z=-15$. A Hesse-féle normálegyenletbe beírva a pontot:

$$\left|\frac{3\cdot 2-4\cdot 0+6\cdot 1+15}{\sqrt{3^2+(-4)^2+6^2}}\right| = \frac{27}{\sqrt{61}} \approx 3{,}46.$$

7.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 8 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 9 & 7 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -9 & -7 & -7 \\ 0 & 2 & 9 & 7 & 7 \\ 0 & -4 & -18 & -14 & -14 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 9 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

Végtelen sok megoldás (z,u szabad par.): $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}u$, $y=\frac{7}{2}-\frac{9}{2}z-\frac{7}{2}u$.

8. $2-2i=\sqrt{8}(\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ))$ harmadik gyökei:

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}(\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)) = \sqrt{2}(\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ))$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}(\cos(105^\circ)+i\sin(105^\circ)) = \sqrt{2}(\cos(105^\circ)+i\sin(105^\circ))$$
$$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}(\cos(225^\circ)+i\sin(225^\circ)) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -1-i$$

9.
$$f'_x(x,y) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad f'_x(1,2)=\frac{3}{25}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{0\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad f'_y(1,2)=-\frac{4}{25}$$

érintősík ($f(1,2)=\frac{1}{5}$) : $\quad z=\frac{3}{25}(x-1)-\frac{4}{25}(y-2)+\frac{1}{5},\quad z=\frac{3}{25}x-\frac{4}{25}y+\frac{2}{5}$

10. $F(x,y,\lambda)=3x+6y+5+\lambda(xy-2)$ Lagrange-függvénnyel:

$$F'_x(x,y,\lambda)=3+\lambda y \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{3}{\lambda}$$
$$F'_y(x,y,\lambda)=6+\lambda x \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{6}{\lambda}$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda)=xy-2 \quad\Rightarrow\quad xy=2 \Rightarrow \left(-\frac{6}{\lambda}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\lambda}\right)=2 \Rightarrow \lambda=\pm 3$$

Két stacionárius pont van: $(-2,-1,3), (2,1,-3)$.

A Hesse-determináns: $\begin{vmatrix} 0 & \lambda & y \\ \lambda & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda xy,$

$(-2,-1,3)$ pontban pozitív: feltételes lokális maximum, értéke $f(-2,-1)=-7$
$(2,1,-3)$ pontban negatív: feltételes lokális minimum, értéke $f(2,1)=17$.

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-2}-3^{n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^3)^n/4}{(3^2)^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot 3}{(3^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{8}{9}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{3}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}} - 3\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\cdot 8 - 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$