5. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6. $\mathbf{v} = (1, 3, -11)$, $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, így

$$\mathbf{v}_\parallel = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{15}{3}\mathbf{a} = 5(1,1,-1) = (5,5,-5),$$
$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\parallel = (1,3,-11) - (5,5,-5) = (-4,-2,-6).$$

7. Az alábbi mátrix rangja a kérdés:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -14 & -6 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 3 & -21 & -9 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & -14 & -6 \\ 0 & 3 & -21 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 2, így két lineárisan független vektor választható ki.

8. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+18i}{3+4i} = \frac{1+18i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i+54i-72i^2}{3^2+4^2} = \frac{75+50i}{25} = 3+2i$$
$$\frac{z_1}{z_2} - \overline{z_1} + |z_2| = 3+2i-(1-18i)+\sqrt{3^2+4^2} = 7+20i$$

9. $$f'_x(x,y) = y\cos(xy)y = y^2\cos(xy) \qquad f'_x(\pi,1) = -1$$
$$f'_y(x,y) = \sin(xy) + y\cos(xy)x \qquad f'_y(\pi,1) = -\pi$$
$$\operatorname{grad} f(\pi,1) = (-1,-\pi) \qquad \mathbf{e} = (\cos(\tfrac{\pi}{3}), \sin(\tfrac{\pi}{3})) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$f'_\alpha(\pi,1) = (-1,-\pi)\cdot\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{-1-\sqrt{3}\pi}{2} \approx -3{,}22$$

10. $$f'_x(x,y) = e^x - 3 \qquad x = \ln 3$$
$$f'_y(x,y) = 2(y+2) \qquad y = -2$$

Egyetlen stacionárius pont a $(\ln 3, -2)$.

A Hesse-determináns: $\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^x$, mely a stacionárius pontban pozitív.

A $(\ln 3, -2)$ lokális minimumhely, értéke $f(\ln 3, -2) = 3 - 3\ln 3 \approx -0{,}296$.

11. Ez egy Leibniz-sor: alternáló, a tagok 0-hoz tartanak, és abszolút értékben monoton csökkenőek ($\sqrt[3]{2n}$ monoton nő). Ezért a sor konvergens.

A $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ sor divergens ($\frac{1}{3} \not> 1$), így nem abszolút konvergens, azaz feltételesen konvergens.