

1. előadás

Halmazok, intervallumok, egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. szeptember 9.

Halmazok

Néhány nevezetes halmaz:

- ▶ $\emptyset$ üres halmaz
- ▶ $\mathbb{N}$ természetes számok *0 benne van?*
- ▶ $\mathbb{Z}$ egész számok
- ▶ $\mathbb{Q}$ racionális számok
- ▶ $\mathbb{R}$ valós számok
- ▶ $\mathbb{C}$ komplex számok (*nem kell tudni, majd második félévben*)

Néhány halmazművelet:

A és B halmaz

- ▶ $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$ **unió**
- ▶ $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$ **metset**
- ▶ $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$ **kivonás**

Ha H az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ **komplementer**.

Az A és a B halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük: $A \cap B = \emptyset$.

Halmazok folytatás

Részhalmaz: $B \subseteq A$, ha B minden eleme benne van A -ban, azaz

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Szigorú részhalmaz: $B \subset A$ vagy $B \subsetneq A$, ha $B \subseteq A$, de $A \neq B$

Az A és a B halmazok **Descartes-szorzata:**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa: $A = B = \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Feladat

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

Feladat

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$A \cup B = \{1; 2; 3\}.$$

$$A \cap B = \{2\}.$$

$$A \setminus B = \{1\}.$$

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2)\}$$

$$(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$$

Intervallumok

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{zárt intervallum}$$

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{nyílt intervallum}$$

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad \text{félig nyílt, félig zárt intervallum}$$

jobbról nyílt, balról zárt intervallum

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{félig nyílt, félig zárt intervallum}$$

jobbról zárt, balról nyílt intervallum

A fentiekben a és b lehet végtelen is, de ekkor azon a végén csak nyílt lehet:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \quad \text{nyílt intervallum}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \quad \text{zárt intervallum}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \quad \text{nyílt intervallum}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \quad \text{zárt intervallum}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad \text{valós számok}$$

Egy $x \in \mathbb{R}$ valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete:

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Egy egyenlet

Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$x + 1 = \sqrt{7 + x} \quad \text{négyzetre emelés:}$$

$$\Downarrow$$

$$(x + 1)^2 = 7 + x \quad \text{kifejtés:}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 7 + x \quad \text{átrendezés:}$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Visszahelyettesítve az $x_1 = 2$ megoldás, míg az $x_2 = -3$ nem, a négyzetre emelés során nyertük ezt a hamis gyököt.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + x}{x + 3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Még egy egyenlet

Oldjuk meg az $\frac{x^2 + x}{x + 3} = x$ egyenletet a valós számok halmazán.

Mivel a nevezőben $x + 3$ áll, ami nem lehet nulla, így $x \neq -3$.

Szorozzunk be $(x + 3)$ -mal:

$$x^2 + x = x(x + 3)$$

$$x^2 + x = x^2 + 3x$$

$$0 = 2x$$

$$x = 0$$

Tehát a megoldás $x = 0$ (ami nem -3).

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$-5 \leq 2x + 3 \leq 5$$

$$-8 \leq 2x \leq 2$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

Tehát a megoldás a $[-4, 1]$ intervallum.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Megint kikötjük, hogy $x \neq -3$. Két eset lehetséges $x+3$ előjele szerint:

1. eset $x+3$ pozitív, azaz $-3 < x$.

Ekkor $(x+3)$ -mal beszorozva nem változik az egyenlőtlenség iránya:

$$\begin{aligned}1 &\leq 2(x+3) \\1 &\leq 2x+6 \\-5 &\leq 2x \\-2,5 &\leq x,\end{aligned}$$

ekkor valóban teljesül, hogy $-3 < x$.

2. eset $x+3$ negatív, azaz $-3 > x$.

Ekkor $(x+3)$ -mal beszorozva megfordul az egyenlőtlenség iránya:

$$\begin{aligned}1 &\geq 2(x+3) \\1 &\geq 2x+6 \\-5 &\geq 2x \\-2,5 &\geq x,\end{aligned}$$

de most $-3 > x$, amikor is már a $-2,5 \geq x$ automatikusan teljesül.

Tehát a megoldás: $x \in (-\infty; -3) \cup [-2,5; +\infty)$.

Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség

Ha $a, b \in \mathbb{R}_+$, akkor a számtani közepük $\frac{a+b}{2}$, mértani közepük $\sqrt{ab}$. Ekkor

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

és egyenlőség pontosan $a = b$ esetén van.

Bizonyítás:

A fenti ekvivalens a négyzetek közti egyenlőtlenséggel (nemnegatívak):

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$4ab \leq (a+b)^2$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 \leq (a-b)^2,$$

ami mindig teljesül.

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b$.

Feladat

Ha két (pozitív) szám összege 10, akkor lefeljebb mennyi a szorzatuk?

Feladat

Ha két (pozitív) szám összege 10, akkor lefeljebb mennyi a szorzatuk?

Legyen a két szám a és b . Tudjuk, hogy $a + b = 10$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{10}{2} = 5$$
$$ab \leq 25,$$

így a szorzatuk legfeljebb 25.

Ha nem tesszük fel, hogy pozitívak, akkor is ugyanerre jutunk, mert az összeg miatt legfeljebb az egyik lehetne negatív, de ekkor a szorzatuk negatív lenne, tehát továbbra is fennállna, hogy a szorzatuk legfeljebb 25. (Ha az egyik 0, akkor pedig a szorzatuk is 0.)

Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség általában

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$, akkor a számtani közepük $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, mértani közepük $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Fennáll, hogy

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

és egyenlőség pontosan $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ esetén van.

Ezt nem bizonyítjuk be.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

Házi feladat

Oldjuk meg az $x + 5 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán.

A megoldás: $x = -3$, a -6 hamis gyök.