

14. előadás

Aszimptoták és konvexitás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. november 4.

Aszimptoták

Az **aszimptota** olyan egyenes, melyet a függvény grafikonja tetszőlegesen megközelít.

Ez háromféle lehet:

- ▶ függőleges aszimptota
- ▶ vízszintes aszimptota
- ▶ ferde aszimptota

Függőleges aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **függőleges aszimptotája** van az x_0 pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, esetleg csak az egyik oldali határérték.

Ekkor az $x = x_0$ egyenletű egyenes az aszimptota.

Példák:

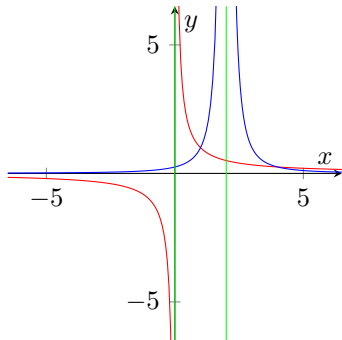
Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete: $x = 0$.

Az $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ függvénynek

az $x_0 = 2$ pontban függőleges aszimptotája van.

Egyenlete: $x = 2$.



Vízszintes aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **vízszintes aszimptotája** van, ha $\pm\infty$ -ben a határértéke egy véges szám.

Ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, akkor az $y = a$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptota a $+\infty$ -ben.

A $-\infty$ -ben hasonlóan definiáljuk.

Példák:

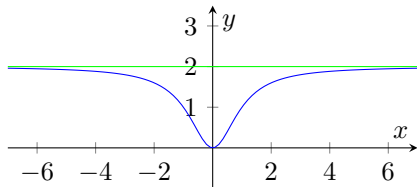
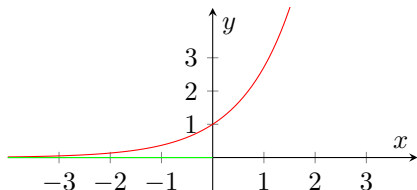
Az $f(x) = e^x$ függvénynek az $y = 0$ egyenes vízszintes aszimptotája a $-\infty$ -ben.

Az $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ függvénynek a határértéke a végtelenben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$$

így az $y = 2$ egyenletű egyenes a vízszintes aszimptotája a $+\infty$ -ben.

A $-\infty$ -ben hasonlóan ugyanez az egyenes.



Ferde aszimptota

Az $f(x)$ függvénynek **ferde aszimptotája** van, ha a függvénygrafikon az $y = ax + b$ egyeneshez „simul” a végtelenben.

Az a és a b együtthatók kiszámítása:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

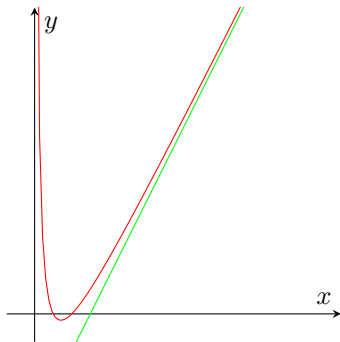
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

A $-\infty$ -ben hasonlóan számítható.

Ha valamelyik határérték nem létezik vagy végtelen, akkor nincs ferde aszimptota.

Az a értékét gyakran a L'Hospital-szabály segítségével számolhatjuk ki:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$



Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 6x + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-6 + \frac{4}{x} \right) = -6 \end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.

Hasonlóan a $-\infty$ -ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

Ferde aszimptota – példák

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{x}$ függvény ferde aszimptotái

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 - 6x + 4}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 6x + 4}{x} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 6x + 4 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-6 + \frac{4}{x} \right) = -6 \end{aligned}$$

Tehát a ferde aszimptota egyenlete: $y = 2x - 6$.

Hasonlóan a $-\infty$ -ben is.

Az $f(x) = x^2$ függvény ferde aszimptotái

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty,$$

tehát ebben az esetben nem létezik ferde aszimptota.

Feladat

Milyen aszimptotái vannak az $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvénynek?

Feladat

Milyen aszimptotái vannak az $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvénynek?

Függőleges aszimptotája nincs (mindenütt értelmes és folytonos).

A határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty,$$

így csak ferde aszimptotája lehet.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

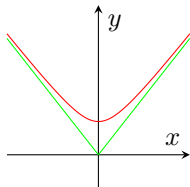
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

Így az aszimptota egyenlete a $+\infty$ -ben $y = x$.

Feladat – folytatás

A $-\infty$ -ben hasonlóan számolhatunk,
de figyelni kell az előjelekre:

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{-|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{-1} = -1 \\b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0\end{aligned}$$



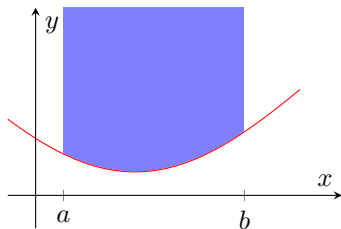
Így az aszimptota egyenlete a $-\infty$ -ben $y = -x$.

Konvexitás

Egy $K \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz konvex, ha bármely $P, Q \in K$ pontra a PQ szakasz teljes egészében benne van a K -ban.

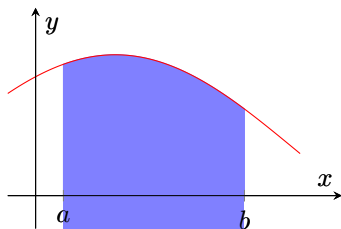
Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény
($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$
intervallumon **konvex**, ha a
grafikonja feletti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \geq f(x)\}$$



Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény
($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$
intervallumon **konkáv**, ha a
grafikonja alatti tartomány konvex:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ és } y \leq f(x)\}$$



Ekvivalens tulajdonságok a konvexitásra

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konvex, ha

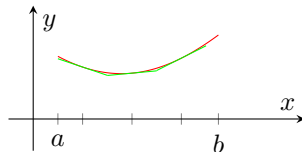
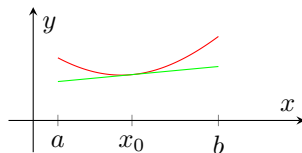
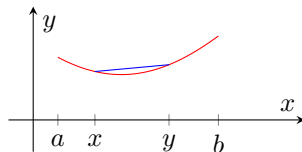
- ▶ minden $x, y \in [a, b]$ -re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon felett van, azaz
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

minden $\lambda \in [0, 1]$ -re.

- ▶ a függvénygrafikon az érintő felett halad, azaz
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

minden $x, x_0 \in [a, b]$ esetén.

- ▶ az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton nő az $[a, b]$ intervallumon.
- ▶ $f''(x) \geq 0$ az $[a, b]$ intervallumon.



Ekvivalens tulajdonságok a konkávitásra

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon pontosan akkor konkáv, ha

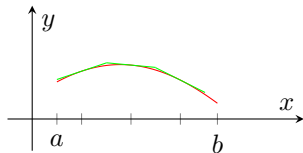
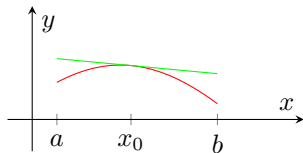
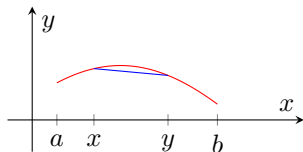
- ▶ minden $x, y \in [a, b]$ -re az $(x, f(x))$ és az $(y, f(y))$ pontokat összekötő szakasz a grafikon alatt van, azaz
$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

minden $\lambda \in [0, 1]$ -re.

- ▶ a függvénygrafikon az érintő alatt halad, azaz
$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

minden $x, x_0 \in [a, b]$ esetén.

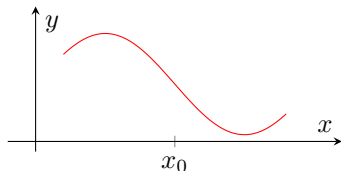
- ▶ az érintő meredeksége, azaz $f'(x)$ monoton csökken az $[a, b]$ intervallumon.
- ▶ $f''(x) \leq 0$ az $[a, b]$ intervallumon.



Inflexiós pont

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) $x_0 \in D_f$ pontja inflexiós pont, ha a függvény x_0 -ban differenciálható, és a függvény x_0 -ban konvexitást vált, azaz előtte konkáv, utána konvex vagy fordítva.

Formálisan: van olyan $\delta > 0$, hogy $[x_0 - \delta, x_0]$ -ban konkáv és $[x_0, x_0 + \delta]$ -ban konvex vagy fordítva.



Példa:

A $\sin x$ függvénynek a π egész számú többszörösei az inflexiós pontjai.

Tétel:

Ha az x_0 inflexiós pont, akkor $f''(x_0) = 0$.

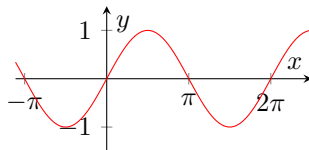
Ez visszafelé nem feltétlenül igaz:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2 \text{ így } f''(0) = 0,$$

de a 0 nem inflexiós pont (a függvény mindenütt konvex).



Példa

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény konvexitása.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

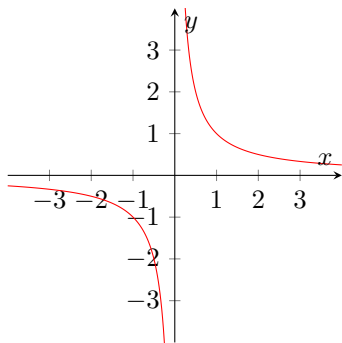
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

A második derivált sehol sem 0, így nincs inflexiós pont.

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < 0$	0	$0 < x$
f''	–	n. é.	+
f	konkáv	n. é.	konvex



Feladat

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Feladat

Az $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ függvény konvexitása.

Kiszámoljuk a függvény második deriváltját:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$$

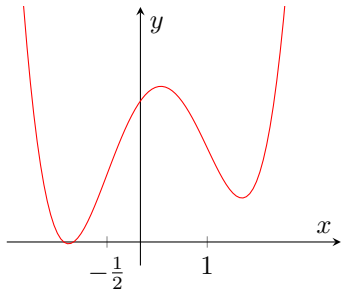
$$f''(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

A második derivált nullhelyei:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 - 6x - 6 = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$



$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2}$$

A második derivált előjeléből leolvashatjuk a konvexitást:

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x$
f''	+	0	-	0	+
f	konvex	inf. pont	konkáv	inf. pont	konvex