

16. előadás

Függvényvizsgálat II.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. november 11.

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

- ▶ értelmezési tartomány (ÉT)
- ▶ zérushely
- ▶ paritás
- ▶ periodicitás
- ▶ értelmezési tartomány szélein határértékek
 - ▶ aszimptoták
- ▶ első derivált
 - ▶ monotonitási tulajdonságok
 - ▶ lokális szélsőértékek
- ▶ második derivált
 - ▶ konvexitás
 - ▶ inflexiós pontok
- ▶ szemantikus ábrázolás
- ▶ értékkészlet (ÉK)

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

- ▶ ÉT: $\mathbb{R}$
- ▶ zérushely: $x = 0$ -ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.
- ▶ paritás: páratlan (felhasználva, hogy az arctg függvény páratlan):

$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg} x) = -f(x)$$

- ▶ periodicitás: nem periodikus (csak egy zérushely)

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

► értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \operatorname{arctg} x = +\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg} x = -\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} -\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$ -ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg} x - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$ -ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

$$f(x) = x - \operatorname{arctg} x$$

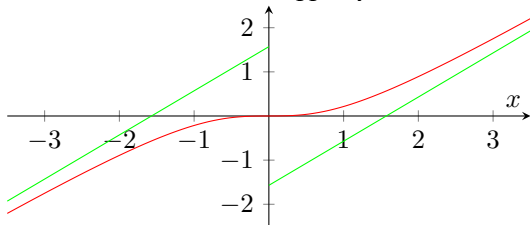
► első és második derivált:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	+	0	+
f	monoton nő	–	monoton nő
f''	–	0	+
f	konkáv	i.p.	konvex

A 0-ban nincs lokális szélsőérték, a függvény monoton nő $\mathbb{R}$ -en.



► ÉK: $\mathbb{R}$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$$

- ▶ ÉT: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ (mert $2x + 1 \neq 0$)
- ▶ zérushely: $x = 1$
- ▶ paritás: nincs ($f(1) = 0$, de $f(-1) \neq 0$)
- ▶ periódus: nincs (egyetlen zérushely miatt)
- ▶ határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

A függvénynek $\pm\infty$ -ben az $y = \frac{1}{4}$ vízszintes aszimptotája van.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-} \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-} \frac{\frac{9}{4}}{(2x+1)^2} = +\infty$$

A függvénynek $x = -\frac{1}{2}$ -ben függőleges aszimptotája van.

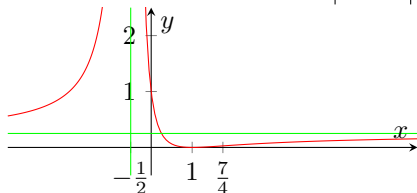
$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2$$

$$f'(x) = 2 \frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1 - (x-1) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6(2x+1)^3 - 6(x-1) \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{6(2x+1) - 36(x-1)}{(2x+1)^4} =$$

$$= \frac{-24x + 42}{(2x+1)^4}$$

	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	1	$1 < x < \frac{7}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{4} < x$
f'	+	n. é.	-	0	+		
	mon. nő	n. é.	mon. csök.	min.	monoton nő		
f''	+	n. é.	+			0	-
	konvex	n. é.	konvex			i. p.	konkáv



lokális minimum: $f(1) = 0$

ÉK: $[0, +\infty)$

$$f(x) = x^x$$

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

- ▶ ÉT: $(0, +\infty)$ (illetve negatív egész számokon is értelmezhető)
- ▶ zérushely: nincs (a függvény mindenütt pozitív)
- ▶ paritás: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)
- ▶ periódus: nincs (a függvény csak a pozitív számokon van értelmezve)
- ▶ határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1, \text{ mert}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'H}}{\sim} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$$

Így a $+\infty$ -ben lehetne ferde aszimptota, de

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{x-1} = +\infty$$

miatt nincsen.

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

► Deriváltak:

$$f'(x) = e^{x \ln x} \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

$$f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \frac{1}{x}$$

Az első derivált $\ln x + 1 = 0$ esetén nulla, azaz $x = \frac{1}{e}$ a nullhely.
A második derivált a pozitív számokon pozitív.

	$0 < x < \frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e} < x$
f'	– mon. csök.	0 min.	+ mon. nő
f''	+ konvex		

lokális minimum: $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} \approx 0,692$

► ÉK: $[e^{-\frac{1}{e}}, +\infty)$

