

17. előadás

Integrálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. november 12.

Primitív függvény

Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény **primitív függvénye** az I nyílt intervallumon, ha $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$ -re.

Szokás antideriválnak is nevezni.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:

$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ vagy $F(x) = x^3 + 1$ vagy $F(x) = x^3 + 2$, igazándiból bármilyen $C \in \mathbb{R}$ -re $F(x) = x^3 + C$ jó.

Tétel:

Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Ezt a tételt a Lagrange-féle középértéktétellel lehet bizonyítani.

(Csak azt kell megmutatni, hogy $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ -ból következik, hogy $F_1 - F_2$ konstans.)

Tétel:

Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Csak kérdés, hogy fel tudjuk-e írni:

Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Határozatlan integrál

Az f függvény primitív függvényeinek összességét **határozatlan integrálnak** nevezzük,

jelölése: $\int f(x) \, dx$.

Példa:

$$\begin{aligned}\int 3x^2 \, dx &= \{x^3 + C \mid C \in \mathbb{R}\} \\ &= x^3 + C\end{aligned}$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad c \in \mathbb{R}$$

Sajnos szorzásra, hányadosra nincs ilyen egyszerű szabály.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, dx = x + C$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, dx = x^n + C$$

$$\int x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}x^n + C,$$

ha $n \neq 0$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C,$$

ha $n \neq -1$

Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C,$$

ha $x > 0$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C,$$

ha $x \neq 0$

Elemi függvények integráljai – táblázat

$f(x)$	$\int f(x) \, dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C \quad x \neq 0$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
e^x	$e^x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C \quad x < 1$

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx =$$

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + C$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{2,5} \, dx = \frac{x^{3,5}}{3,5} + C = \frac{2}{7}x^3 \sqrt{x} + C$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos x \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

$$f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin x + C$$

$$f(0) = \sin 0 + C = C \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$f(x) = \sin x + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + C_1 = 2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x + C_2 = \frac{x^3}{6} - x + C_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + C_2 = -\frac{5}{6} + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x+3)^{100} \, dx =$$

További feladatok

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + C,$$

mivel $(\sin(2x))' = \cos(2x) \cdot 2$.

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x-2} + C$$

$$\int (2x+3)^{100} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{101}}{101} + C = \frac{(2x+3)^{101}}{202} + C$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):

Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

ahol $a \neq 0$.

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = \frac{1}{a} F'(ax + b) \cdot a = f(ax + b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) \, dx =$$

Lineáris helyettesítés

Tétel (Lineáris helyettesítés):

Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

ahol $a \neq 0$.

Bizonyítás:

$$\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = \frac{1}{a} F'(ax + b) \cdot a = f(ax + b)$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) \, dx = \frac{1}{5} (-\cos(5x - 7)) + C = -\frac{\cos(5x - 7)}{5} + C$$

$$a = 5, b = -7, f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x$$

Két bevezető feladat

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} dx &= \int \frac{(x^2 - 2x - 1)(x - 2) + 3}{x - 2} dx = \\ &= \int x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x - 2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3 \ln |x - 2| + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 - x^2} dx &= \int \frac{1}{(1 - x)(1 + x)} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} (-\ln |1 - x| + \ln |1 + x|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C\end{aligned}$$

Lehetett volna az arth ($|x| < 1$ esetén) vagy az arcth ($|x| > 1$ esetén) függvényeket is használni, de a fenti módszer általánosabb módszer.

Parciális törtekre bontás

Két polinom hányadosát integráljuk.

1. Polinomosztással elérjük, hogy a számláló kisebb fokú legyen, mint a nevező.
2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.
3. A törtet felírjuk egyszerűbb törtek összegeként.
4. Ezeket a törteket már tudjuk integrálni.

Példa:

$$\frac{5x^3 - 6x^2 + 43x - 44}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9} = \frac{2}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2} + \frac{3x+1}{x^2-4x+9},$$

mert $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 14x + 9 = (x+1)^2(x^2 - 4x + 9)$.

Másodfokú nevezőjű integrálása

Először teljes négyzetté alakítjuk a nevezőt: $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 + 5$.

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{3(x - 2) + 7}{(x - 2)^2 + 5} = \frac{3(x - 2)}{(x - 2)^2 + 5} + \frac{7}{(x - 2)^2 + 5}$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{3(x - 2)}{(x - 2)^2 + 5} dx = \int \frac{3}{2} \frac{1}{(x - 2)^2 + 5} \cdot 2(x - 2) dx = \frac{3}{2} \ln((x - 2)^2 + 5) + C$$

A második tagé:

$$\int \frac{7}{(x - 2)^2 + 5} dx = \int \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} dx = \frac{7}{5} \sqrt{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{5}} \right) + C$$

Így tehát:

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x + 9} dx = \frac{3}{2} \ln((x - 2)^2 + 5) + \frac{7\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{5}} \right) + C$$

Egy parciális törtekre bontás

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6} dx = ?$$

Először felbontjuk a nevezőt:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Ekkor a törtet ilyen alakban szeretnénk előállítani:

$$\frac{x+5}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2},$$

ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Ezeknek a meghatározásához beszorzunk a nevezővel:

$$x+5 = A(x+2) + B(x-3)$$

A két oldalon álló polinom együtthatói megegyeznek:

$$1 = A + B$$

$$5 = 2A - 3B$$

Ebből az egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $A = \frac{8}{5}$ és $B = -\frac{3}{5}$. Tehát:

$$\int \frac{x+5}{x^2-x-6} dx = \int \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x+2} dx = \frac{8}{5} \ln|x-3| - \frac{3}{5} \ln|x+2| + C$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2} \, dx =$$

Feladat

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2} dx = \int \frac{x}{2+3x^2} + \frac{1}{2+3x^2} dx$$

Az első tag integrálása:

$$\int \frac{x}{2+3x^2} dx = \int \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2+3x^2} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \ln(2+3x^2) + C$$

Míg a másodiké:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2+3x^2} dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \right) + C \end{aligned}$$

Tehát a kérdéses integrál:

$$\int \frac{x+1}{2+3x^2} dx = \frac{1}{6} \ln(2+3x^2) + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \right) + C$$