

# 18. előadás

## Helyettesítéssel és parciális integrálás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2025. november 18.

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx =$$

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx = \sin (x^2 + 3) + C$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx = \sin (x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx =$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx = \sin (x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx = \sin (x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx =$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos (x^2 + 3) \, dx = \sin (x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) \, dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx =$$

## Bevezető feladatok

$$\int 2x \cos(x^2 + 3) \, dx = \sin(x^2 + 3) + C$$

$$\int (\sin x)^3 \cos x \, dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -(\cos x)^{-1}(-\sin x) \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C$$

# Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$$

Vagy  $f(x)$  és  $F(x)$  jelölésekkel ( $F$  az  $f$  primitív függvénye, azaz  $F' = f$ ):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor  $g(x) = ax + b$  alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \, dx = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx =$$

# Első helyettesítési szabály

Összetett függvény deriválási szabálya:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ebből egy integrálási szabály:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$$

Vagy  $f(x)$  és  $F(x)$  jelölésekkel ( $F$  az  $f$  primitív függvénye, azaz  $F' = f$ ):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

Speciális eset, amikor  $g(x) = ax + b$  alakú: lineáris helyettesítés:

$$\int f(ax + b) \cdot a \, dx = F(ax + b) + C$$

Példa:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x) = e^x, \quad F(x) = e^x$$

# Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int x \cos x \, dx =$$

$$f(x) = x \qquad f'(x) =$$

$$g'(x) = \cos x \qquad g(x) =$$

# Parciális integrálás

Leibniz-szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (fg)'(x)$$

Ebből:

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) + C$$

Átrendezve:

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array}$$

## Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} \, dx =$$

# Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int x e^{3x} dx =$$

# Többszörös alkalmazás

$$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$$

$$f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Egy újabb parciális integrálás:

$$\int x e^{3x} dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$$

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^{3x} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$$

Ezzel:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left( \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C \right) = \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + C \end{aligned}$$

## Egy érdekesség

$$\int e^x \sin(2x) dx = \sin(2x)e^x - \int 2 \cos(2x)e^x dx = e^x \sin(2x) - 2 \int e^x \cos(2x) dx$$

$$f(x) = \sin(2x) \quad f'(x) = 2 \cos(2x)$$

$$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$$

$$\int e^x \cos(2x) dx = \cos(2x)e^x - \int -2 \sin(2x)e^x dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$f(x) = \cos(2x) \quad f'(x) = -2 \sin(2x)$$

$$g'(x) = e^x \quad g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(2x) dx &= e^x \sin(2x) - 2 \left( e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x) dx \right) = \\ &= e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx \end{aligned}$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + C$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5}e^x \sin(2x) - \frac{2}{5}e^x \cos(2x) + C$$

## Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx =$$

## Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

## Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx =$$

## Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & g(x) &= x \end{aligned}$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x^2+1} \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x & f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \\ g'(x) &= x & g(x) &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1} \, dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$$

## Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} \, dx = \frac{1}{\ln x} \ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx = 1 + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} \, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \ln x$$

Tehát

$$0 = 1$$

## Egy kérdés

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \frac{1}{\ln x} \ln x - \int -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x} \ln x dx = 1 + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = \ln x$$

Tehát

$$0 = 1$$

A hiba az integrációs konstans (+C) elhanyagolása.

Egyébként:

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C$$

Amikor nem jelenik meg a belső függvény deriváltja

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx = \int \sin(u) 2u \, du = 2 \int u \sin(u) \, du$$

Az új változó:  $u = \sqrt{x}$

A régi változót kifejezzük az újjal:  $u^2 = x$

Lederiváljuk:  $\frac{dx}{du} = 2u$

Átrendezve:  $dx = 2u \, du$

Parciális integrálással folytatjuk:

$$\int u \sin(u) \, du = u(-\cos u) - \int -\cos u \, du = -u \cos u + \sin u + C$$

$$f(u) = u \quad f'(u) = 1$$

$$g'(u) = \sin u \quad g(u) = -\cos u$$

A végeredménybe még az eredeti változót is vissza kell írni:

$$\begin{aligned} \int \sin(\sqrt{x}) \, dx &= 2 \int u \sin(u) \, du = -2u \cos u + 2 \sin u + C = \\ &= -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

## Második helyettesítési szabály

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(u))g'(u) \, du,$$

ahol  $x = g(u)$  monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} \, dx =$$

## Második helyettesítési szabály

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(u))g'(u) \, du,$$

ahol  $x = g(u)$  monoton függvény.

Példa:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx = \int \frac{u^2}{1+u} \frac{1}{u} \, du = \int \frac{u}{1+u} \, du =$$

$u = e^x \rightsquigarrow x = \ln u$ , így  $g(u) = \ln u$ , melynek deriváltja:  $g'(u) = \frac{1}{u}$   
(Vagy:  $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u} \rightsquigarrow dx = \frac{1}{u} du$ )

Ez egy polinomosztás:

$$= \int \frac{1+u-1}{1+u} \, du = \int 1 - \frac{1}{1+u} \, du = u - \ln(1+u) + C =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u \, du = \int 1 \, du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u \, du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx =$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx =$$

## Néhány ismert példa

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int 1 du = u + C = \arcsin x + C$$

$$x = \sin u \quad (u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightsquigarrow u = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{du} = \cos u \rightsquigarrow dx = \cos u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch} u} \operatorname{ch} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arsh} x + C$$

$$x = \operatorname{sh} u, \text{ és így } \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{ch} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch} u du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{sh} u} \operatorname{sh} u du = \int 1 du = u + C = \operatorname{arch} x + C$$

$$x = \operatorname{ch} u \quad (u \geq 0), \text{ és így } \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} = \operatorname{sh} u$$

$$\frac{dx}{du} = \operatorname{sh} u \rightsquigarrow dx = \operatorname{sh} u du$$