

2. előadás

Függvényábrázolás és bizonyítási módszerek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

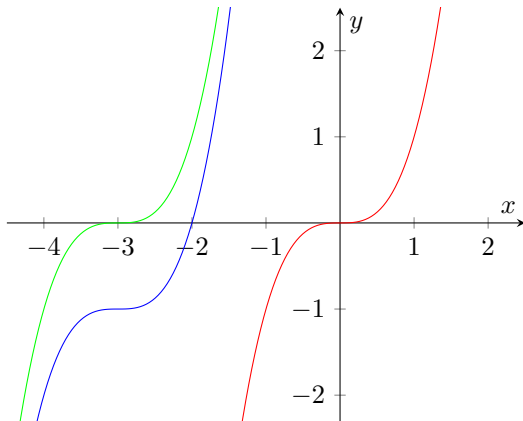
2025. szeptember 10.

Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = (x + 3)^3 - 1$ függvény grafikonját.

A $h(x) = (x + 3)^3$ függvény grafikonját a $g(x) = x^3$ függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az x -hez hozzáadunk (levonunk) x_1 -et, akkor a grafikont x_1 -gyel balra (jobbra) toljuk. Végül az $f(x) = (x + 3)^3 - 1$ függvény grafikonját a h függvény grafikonjának 1-gyel való lefelé tolásával kapjuk.



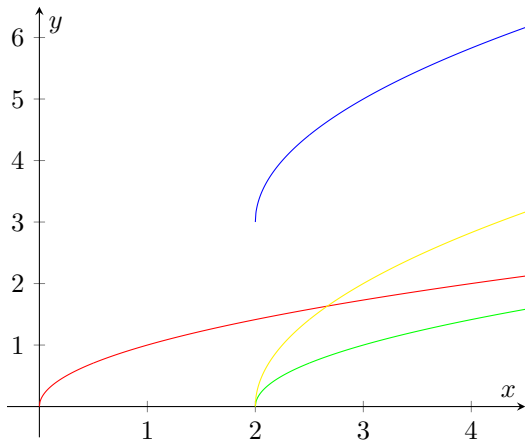
Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás

Ábrázoljuk az $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$ függvény grafikonját.

Hasonlóan az előzőhöz: A $\sqrt{x}$ grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a $\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját. Ennek a $2\sqrt{x-2}$ a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a $2\sqrt{x-2} + 3$ grafikonját.

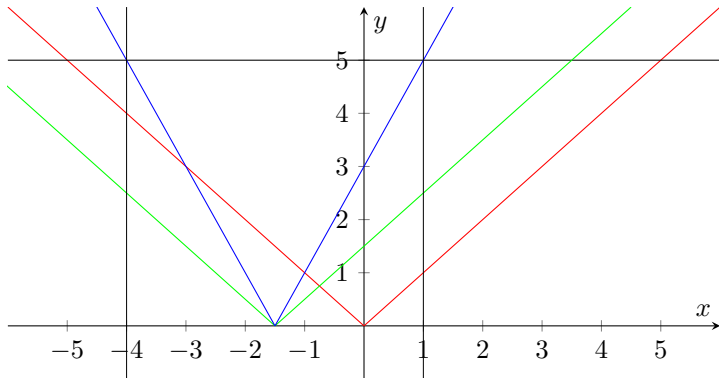


Egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x + 3|$ grafikonját az ismert $|x|$ grafikonból transzformációkkal kaphatjuk:

Mivel $|2x + 3| = 2|x + 1,5|$, így először az $|x + 1,5|$ függvény grafikonját ábrázoljuk.



Így le tudjuk olvasni a megoldást: $[-4, 1]$.

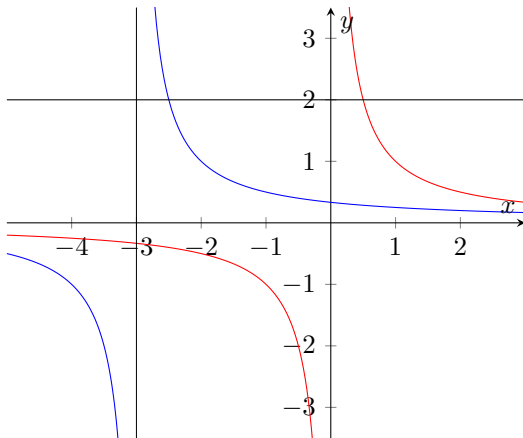
Még egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Még egy tegnapi feladat

Oldjuk meg *grafikusan* az $\frac{1}{x+3} \leq 2$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Az $\frac{1}{x+3}$ grafikonját az ismert $\frac{1}{x}$ grafikonból eltolással kaphatjuk:



Így le tudjuk olvasni a megoldást: $(-\infty; -3) \cup [-2, 5; +\infty)$.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

Még egy egyenlőtlenség

Oldjuk meg az $x^2 + 2x > 3$ egyenlőtlenséget.

Teljes négyzetté alakítással:

$$x^2 + 2x > 3$$

$$(x + 1)^2 - 1 > 3$$

$$(x + 1)^2 > 4$$

$$|x + 1| > 2$$

$$x + 1 < -2 \quad \text{vagy} \quad x + 1 > 2$$

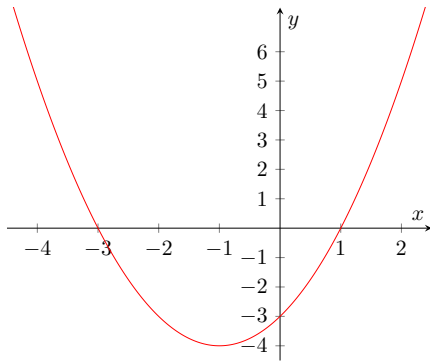
$$x < -3 \quad \text{vagy} \quad x > 1$$

azaz $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Másik lehetőség: az $x^2 + 2x - 3$ függvény grafikonja egy parabola (mivel másodfokú), mely felfelé nyílik (mivel pozitív a főegyüttható).

A nullhelyektől balra, illetve jobbra vannak a megfelelő értékek:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix}$$



Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1, 2)$ és a $Q(3, 4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(1, 2)$ és a $Q(3, 4)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Az egyenes *meredeksége*: 2 egységet emelkedünk, míg 2 egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség: 1.

Általában a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ által meghatározott egyenes meredeksége $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Tehát az egyenes *egyenlete* $y = 1 \cdot x + b$, ahol a b számot úgy kell meghatározni, hogy a pontjaink kielégítsék ezt az egyenletet. $b = 1$.

Általában $y - y_1 = m(x - x_1)$, ahol $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

A függőleges egyeneseket nem tudjuk így felírni, azok egyenlete $x = x_1$ alakú.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3.$$

$$\text{A meredekség: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 3.$$

$$\text{A meredekség: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

$$\text{Egyenes alatti pontok: } y < -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

$$\text{Egyenes feletti pontok: } y > -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Teljes indukció

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

Készítsünk táblázatot!

n	1	2	3	4	5	6
összeg	1	3	6	10	15	21

Megsejthetjük, hogy

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ -ra mindenesetre igaz.

Ha igaz n -re, akkor $(n+1)$ -re vajon igaz?

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \end{aligned}$$

Tehát akkor igaz $(n+1)$ -re is. 1-től n -ig végiglépegetve, tetszőleges n -re igaz.

Feladat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

Feladat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

Megint megnézzük kis n -ekre:

n	1	2	3	4
összeg	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$

Sejtés: az összeg $\frac{n}{n+1}$.

A sejtés $n = 1$ esetén helyes.

Ha tudjuk n -re, akkor $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\&= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+1+1}\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a sejtésünket.

Indirekt bizonyítás

Mutassuk meg, hogy a $\sqrt{2}$ szám irracionális.

Feltesszük, hogy nem, azaz, hogy racionális, két egész szám hányadosa:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

Négyzetre emelve, és átszorozva:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$

A számelmélet alaptétele szerint mindkét oldal egyértelműen prímtényezők szorzatára bontható. Így mindkét oldalon a 2 kitevője azonos.

Másrészt négyzetszámokban minden prímtényező kitevője páros.

Ez ellentmondás, így indirekt feltevésünk volt hamis.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális.

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2 + 3x > 2$ egyenlőtlenséget.

Házi feladat

Oldjuk meg az $-x^2 + 3x > 2$ egyenlőtlenséget.

Megoldás: $x \in (1, 2)$.