

4. előadás

Függvények

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. szeptember 23.

Monotonitás

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vagy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- ▶ **monoton nő**, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- ▶ **szigorúan monoton nő**, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ▶ **monoton csökken**, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- ▶ **szigorúan monoton csökken**, ha $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- ▶ **monoton**, ha $f(x)$ monoton nő vagy monoton csökken.
- ▶ **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:

$f(x) = x$ szigorúan monoton nő.

$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$ -n és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$ -n, de $\mathbb{R}$ -en nem monoton.

$h(x) = [x]$ monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

$i(x) = 2$ monoton nő és monoton csökken.

Ha egy függvény monoton nő és monoton csökken, akkor konstans függvény.

Korlátosság

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- ▶ **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in D_f$ esetén (k **alsó korlát**). $\rightsquigarrow$ **legnagyobb alsó korlát**
- ▶ **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén (K **felső korlát**). $\rightsquigarrow$ **legkisebb felső korlát**
- ▶ **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in D_f$ esetén.

Példák:

$f(x) = |x|$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin x$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1 , felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Periodicitás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **periodikus**, ha létezik $d \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm d \in D_f$ és $f(x+d) = f(x)$ (d szerint periodikus).

Ha egy függvény d szerint periodikus, akkor kd szerint is periodikus ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

A legkisebb pozitív periódus a **főperiódus** (ha van).

Egy példa, amikor nincs: Dirichlet-függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

Példák:

$\sin x, \cos x$ 2π szerint periodikus

$\operatorname{tg} x$ π szerint periodikus

$\{x\}$ törtrész függvény 1 szerint periodikus

Paritás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- ▶ **páros**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
A grafikon az y tengelyre tükrös.
- ▶ **páratlan**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

$x^2, |x|, \cos x$ páros

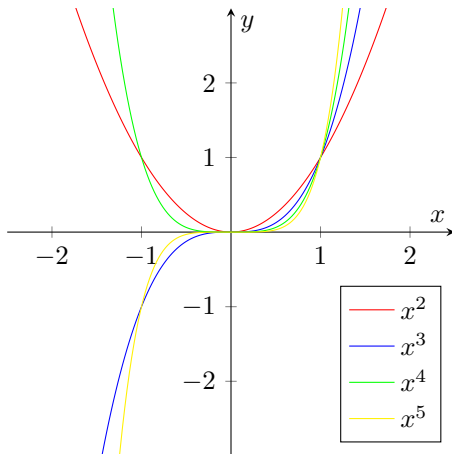
$x, x^3, \sin x$ páratlan

x^n páros, ha n páros, és páratlan, ha n páratlan

Függvénygrafikon

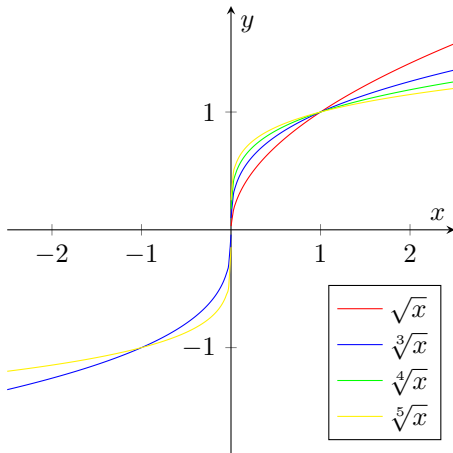
Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$.

Az x^n függvény ($n \in \mathbb{Z}_+$) grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, míg páratlan $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához.



Függvénygrafikon: gyökfüggvények

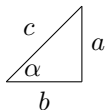
Az $\sqrt[n]{x}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve.



Trigonometrikus függvények

Derékszögű háromszögben (α hegyesszög):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$



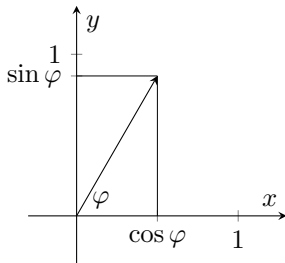
Általánosan:

Az x tengellyel φ szöget bezáró egységvektor vetülete
az x tengelyre $\cos \varphi$,
az y tengelyre $\sin \varphi$.

Összefüggés:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Továbbá mindkét függvény 360° szerint periodikus.



A tangens és kotangens függvény (ahol értelmes):

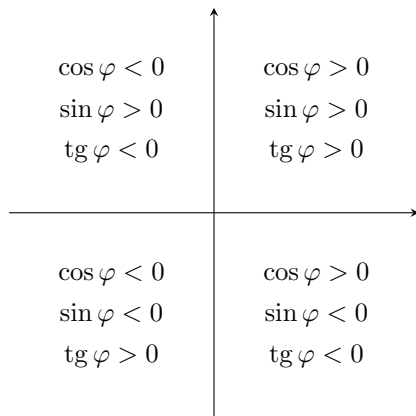
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad \varphi \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

jelölés még: $\tan \varphi$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad \varphi \neq k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

jelölés még: $\cot \varphi$

Előjelek



Addíciós tételek

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Speciális esetek:

$$\beta = 90^\circ :$$

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = \sin \alpha \cos(90^\circ) + \cos \alpha \sin(90^\circ) = \sin \alpha \cdot 0 + \cos \alpha \cdot 1 = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha \cos(90^\circ) - \sin \alpha \sin(90^\circ) = \cos \alpha \cdot 0 - \sin \alpha \cdot 1 = -\sin \alpha$$

$$\beta = 180^\circ :$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = \sin \alpha \cos(180^\circ) + \cos \alpha \sin(180^\circ) = \sin \alpha \cdot (-1) + \cos \alpha \cdot 0 = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = \cos \alpha \cos(180^\circ) - \sin \alpha \sin(180^\circ) = \cos \alpha \cdot (-1) - \sin \alpha \cdot 0 = -\cos \alpha$$

$$\alpha = \beta :$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

amiből

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

Nevezetes szögek szögfüggvényei

Egy szabályos háromszög felét tekintve megállapíthatjuk, hogy

$$\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \quad \text{és} \quad \cos(60^\circ) = 1/2.$$

Továbbá az egyenlőszárú derékszögű háromszögből

$$\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2} \quad \text{és} \quad \cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}.$$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.é.	$-\sqrt{3}$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0

A továbbiakat a következő összefüggésekkel számolhatjuk:

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$$

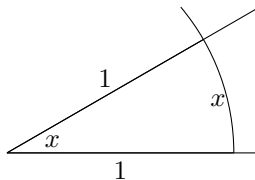
$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha$$

Radián

A szögeket fok helyett radiánban is mérhetjük:

fok	radián
0°	0
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
360°	2π



Általában d fok $\frac{d}{180}\pi$ radiánban.

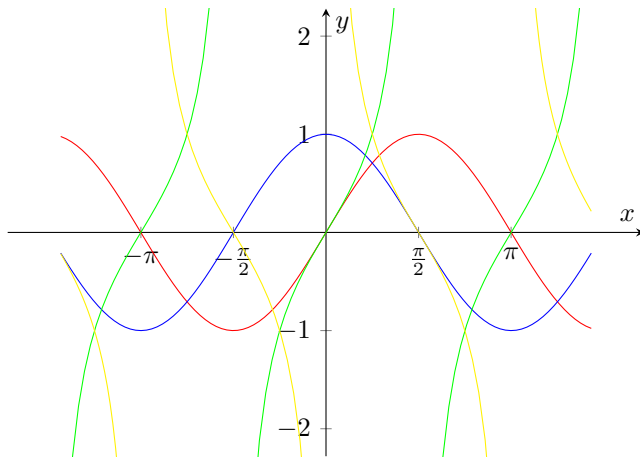
Fordítva: x radián $\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$.

Általában a trigonometrikus függvények „szebb” függvények, ha radiánban számoljuk a szögeket.

Számológépnél ügyelni kell arra, hogy a megfelelő szögmértékegység legyen megadva!

Trigonometrikus függvények függvénygrafikonjai

A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ függvények grafikonjai:

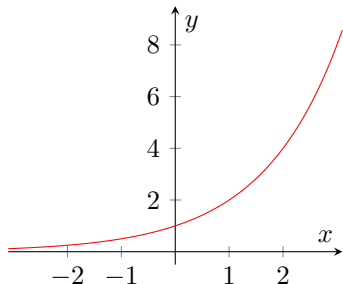


Exponenciális függvény

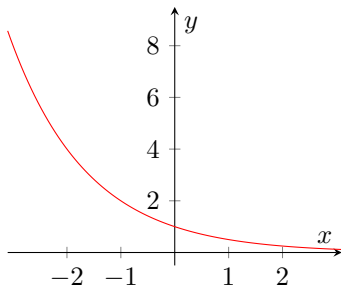
Ha $x = \frac{p}{q}$ racionális (p, q egész) és a pozitív, akkor $a^x = \sqrt[q]{a^p}$.

Ezt a függvényt „szépen” kiterjeszthetjük az összes valós számra.

$a > 1$ esetén ($a = 2$)



$0 < a < 1$ esetén ($a = \frac{1}{2}$)



Az $x \mapsto a^x$ függvényt exponenciális (hatványkitevő) függvénynek nevezzük.

Az $a = e = 2,718281828459 \dots$ esetén „az” exponenciális függvény (jelölés még: $\exp(x)$).

Exponenciális függvények azonosságai

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

Hiperbolikus függvények

koszinusz hiperbolikus

(hiperbolikus koszinusz)

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

páros, konvex és $\operatorname{ch} x \geq 1$,

jelölés még: $\cosh$

szinusz hiperbolikus

(hiperbolikus szinusz)

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

páratlan, monoton nő,

jelölés még: $\sinh$

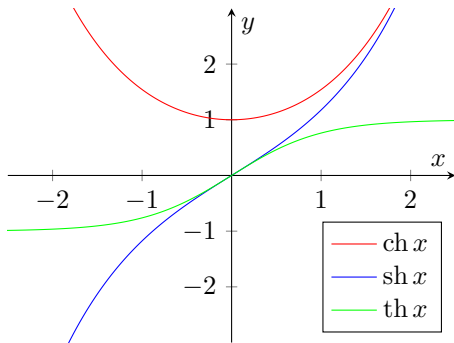
tangens hiperbolikus

(hiperbolikus tangens)

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

páratlan, monoton nő, értéke -1 és 1 között,

jelölés még: $\tanh$



Összefüggés:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$$

Hiperbolikus függvények tulajdonságainak bizonyítása

A monotonitás és a konvexitás bizonyítására később lesznek eszközeink.

A koszinusz hiperbolikus többi tulajdonságának bizonyítása:

A párosságot $-x$ behelyettesítéssel látjuk be:

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Az alsó korlát bizonyításához a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget használjuk:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq \sqrt{e^x e^{-x}} = \sqrt{e^{x-x}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1$$

Házi feladat a másik két függvény paritásának és a tangens hiperbolikus alsó és felső korlátjának bizonyítása.

Összefüggés bizonyítása:

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} + 1 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} + 4}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \operatorname{ch}^2 x$$