

5. előadás

Függvények inverze és kompozíciója

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. szeptember 24.

Inverz

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **injektív**, ha az értékkészletének minden elemét pontosan egyszer veszi fel (pontosan egy olyan pont van az értelmezési tartományban, ahol ez a függvény értéke), azaz

$$x_1 \neq x_2 \in D_f \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) injektív függvény **inverze** az a f^{-1} -gyel jelölt függvény, melyre $f^{-1}(y) = x$, ha $f(x) = y$, azaz $f^{-1}(f(x)) = x$.

Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete. (Az f^{-1} inverz függvény értékkészlete az f függvény értelmezési tartománya.)

Példák:

$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze

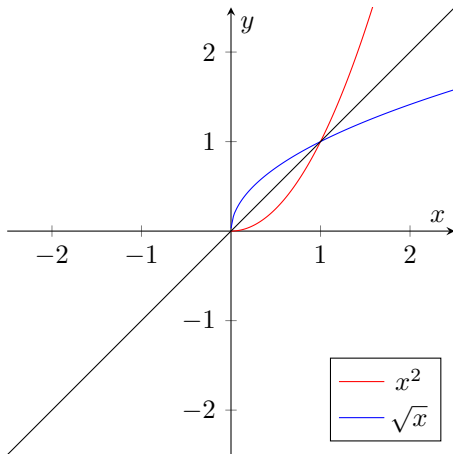
$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$

$f(x) = x^3$ inverze $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Inverz függvény grafikonja

Az inverz függvény grafikonját az $x = y$ egyenesre való tükrözéssel kapjuk:



Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$f(x) = y$$

$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$.

A $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

Függvények invertálása

Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$f(x) = y$$

$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}$.

A $g(x) = \sqrt[3]{x^5 - 1}$ függvény inverze:

$$g(x) = y$$

$$\sqrt[3]{x^5 - 1} = y$$

$$x^5 - 1 = y^3$$

$$x^5 = y^3 + 1$$

$$x = \sqrt[5]{y^3 + 1},$$

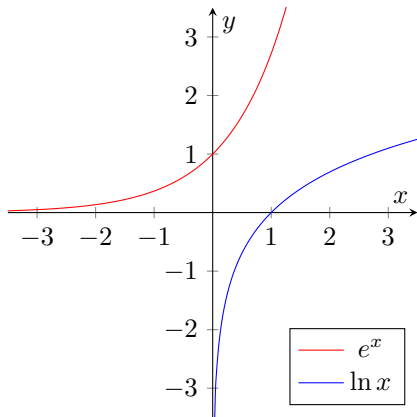
tehát $g^{-1}(y) = \sqrt[5]{y^3 + 1}$, azaz $g^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$.

A logaritmus függvény

a^x exponenciális függvény inverze:
 a alapú logaritmus függvény: $\log_a(x)$

e^x inverze a természetes alapú
logaritmus függvény:
 $\ln x (= \log_e(x))$
(latin *logarithmus naturalis*)

Mivel az exponenciális függvények
értékkészlete $(0, +\infty)$, így ez a
logaritmus függvények értelmezési
tartománya.



A logaritmus függvény azonosságai

Felhasználjuk az exponenciális függvény azonosságait:

$$a^0 = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$a^1 = a$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

$$b^{xy} = (b^x)^y$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Feladat

Invertáljuk az $f(x) = \frac{3^{2x-1}}{2}$ függvényt.

Feladat

Invertáljuk az $f(x) = \frac{3^{2x-1}}{2}$ függvényt.

$$f(x) = y$$

$$\frac{3^{2x-1}}{2} = y$$

$$3^{2x-1} = 2y$$

$$2x - 1 = \log_3(2y)$$

$$x = \frac{\log_3(2y) + 1}{2},$$

$$\text{tehát } f^{-1}(x) = \frac{\log_3(2x) + 1}{2}.$$

Színusz inverze

A $\sin x$ nem injektív:

pl. $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

De az

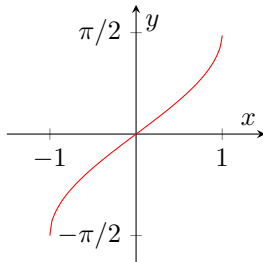
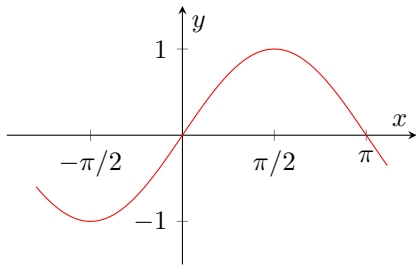
$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \sin x$$

függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.

Inverze:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Koszinusz inverze

A $\cos x$ nem injektív:

$$\text{pl. } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

De az

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$x \mapsto \cos x$$

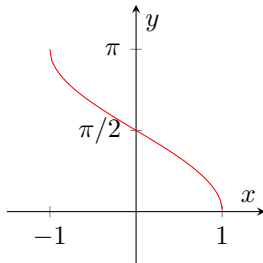
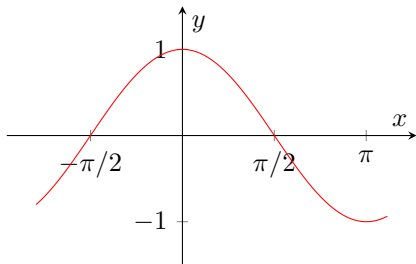
függvény már injektív, így vehetjük az inverzét.

Inverze:

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\text{Mivel } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$



A tangens és a kotangens függvény inverze

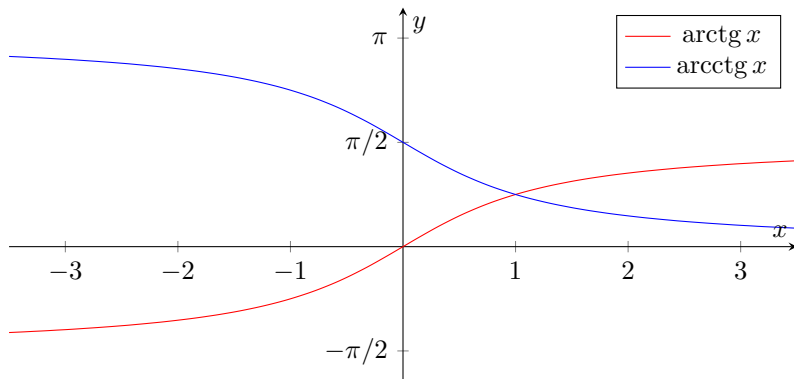
A $\operatorname{tg} x$ függvényt a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.

Itt az inverze: $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

A $\operatorname{ctg} x$ függvényt a $(0, \pi)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.

Itt az inverze: $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Megjegyzés: $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.



Feladat

Invertálható-e az $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sin \left(\frac{2x - \pi}{2} \right)$, $x \in [0, \pi]$ függvény? Ha igen, adjuk meg az inverzét.

Feladat

Invertálható-e az $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right)$, $x \in [0, \pi]$ függvény? Ha igen, adjuk meg az inverzét.

$$x \in [0, \pi] \Rightarrow 2x \in [0, 2\pi] \Rightarrow 2x - \pi \in [-\pi, \pi] \Rightarrow \frac{2x - \pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

A $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon a szinusz függvény szigorúan monoton nő, tehát:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 3 \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right) &= 3 \sin\left(\frac{2y - \pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{2y - \pi}{2}\right) \end{aligned}$$

egyenlőségből következik, hogy $\frac{2x - \pi}{2} = \frac{2y - \pi}{2}$, amiből következik, hogy $x = y$, így a függvény invertálható.

Feladat folytatása

Invertálható-e az $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right)$, $x \in [0, \pi]$ függvény? Ha igen, adjuk meg az inverzét.

Az inverze felhasználva, hogy $x \in [0, \pi]$ esetén $\frac{2x - \pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ahol a szinusz függvény inverze az arcsin függvény:

$$\begin{aligned}f(x) &= y \\3 \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right) &= y \\ \sin\left(\frac{2x - \pi}{2}\right) &= \frac{y}{3} \\ \frac{2x - \pi}{2} &= \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) \\ 2x - \pi &= 2 \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) \\ 2x &= 2 \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) + \pi \\ x &= \arcsin\left(\frac{y}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$.

Hiperbolikus függvények inverze

A $\operatorname{ch} x$ függvényt a $[0, +\infty)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze **area koszinusz hiperbolikus**:
 $\operatorname{arch} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

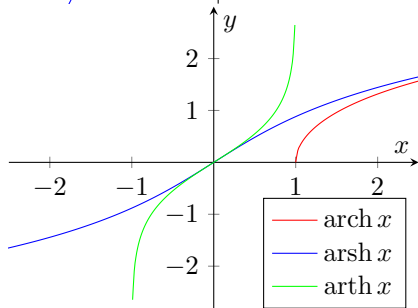
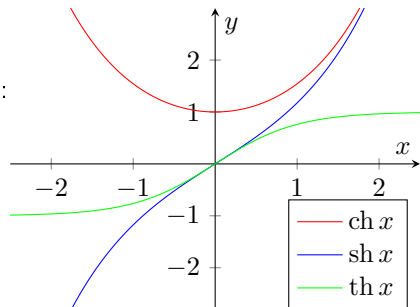
$$\operatorname{arch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

A $\operatorname{sh} x$ függvény injektív.
Inverze **area szinusz hiperbolikus**:
 $\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

A $\operatorname{th} x$ függvény injektív.
Inverze **area tangens hiperbolikus**:
 $\operatorname{arth} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$



Koszinusz hiperbolikus inverze – bizonyítás

Feladat:

Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikus (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

Koszinusz hiperbolikus inverze – bizonyítás

Feladat:

Határozzuk meg a koszinusz hiperbolikus (nemnegatív számokra vett megszorításának) inverzét.

$$\operatorname{ch} x = y$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

$$e^x + e^{-x} = 2y$$

$$e^{2x} + 1 = 2ye^x$$

$$(e^x)^2 + 1 - 2ye^x = 0$$

$$t^2 - 2yt + 1 = 0,$$

ahol $t = e^x$. Az utolsó egyenlet t -re egy másodfokú egyenlet, amit a megoldóképlettel megoldhatunk:

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Koszinusz hiperbolikus inverze – folytatás

$$t = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Mivel $t = e^x$ legalább 1 (nemnegatív számokra vett megszorítással dolgozunk), így a $-$ előjel nem jó, mert:

$$y - \sqrt{y^2 - 1} = \left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} < 1,$$

ha $y > 1$ (ch $x \geq 1$). Tehát:

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{y^2 - 1} \\ x &= \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) \end{aligned}$$

Így az inverz:

$$\operatorname{arch}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

ahogy szerepelt a korábbi dián.

Házi feladat a másik két hiperbolikus függvény inverzének kiszámolása.

Függvénykompozíció

Ha $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$, akkor

$$g \circ f: A \rightarrow C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A g a **külső**, míg f a **belső függvény**.

Ha $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$), akkor a $g \circ f$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ és } f(x) \in D_g\}.$$

Példa:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (D_f = [0, +\infty)) \text{ és } g(x) = 2x + 1 \quad (D_g = \mathbb{R})$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \qquad 2x + 1 \geq 0$$