

# 7. előadás

## Folytonosság

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,  
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 1.

# Pontbeli folytonosság

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik  $x_0$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ekvivalens definíció:

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény folytonos az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta > 0$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$  esetén  $x \in D_f$  és  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Hasonlóan egyoldali folytonosság:

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **jobbról folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ .

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **balról folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$ .

Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák:

$f(x) = [x]$  függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.

$f(x) = \sqrt{x}$  függvény a 0-ban csak jobbról folytonos.

A hasonló határértékes tételekből:

Tétel:

Egy adott  $x_0$  pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az  $x_0$  pontban.

Tétel:

Ha a  $g$  függvény folytonos  $x_0$ -ban és  $f$  függvény folytonos a  $g(x_0)$ -ban, akkor  $f \circ g$  is folytonos  $x_0$ -ban.

# Függvények folytonossága

Általában egy  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) **függvény folytonos**, ha minden  $x_0 \in D_f$  pontban folytonos.

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, ha minden  $x_0 \in (a, b)$  pontban folytonos, és  $a$ -ban jobbról,  $b$ -ben balról folytonos.

Példák:

$x, x^2, |x|, e^x, \sin x, \frac{1}{x}$  folytonosak.

$[x]$  függvény csak az egész pontokon kívül folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Tétel:

Ha az  $f$  függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az  $f^{-1}$  inverz létezik és folytonos (és monoton).

# Feladat

Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvény az  $x \neq 2$  pontokban folytonos.

Az  $x = 2$  pontban:

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 + 1) = 5, \text{ így}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

A függvény pontosan akkor folytonos  $x = 2$ -ben, ha  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

Tehát az kell, hogy  $a = f(2) = 5$  legyen.

## Még egy feladat

Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

## Még egy feladat

Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x < 0 \\ 3x + a, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

A függvény az  $x \neq 0$  pontokban folytonos, továbbá 0-ban jobbról folytonos. Az  $x = 0$  pontban a bal oldali határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \cos x = 1$$

Így az kell, hogy  $1 = f(0) = a$  legyen.

# Szakadási pontok

Ha egy  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény egy  $x_0 \in D_f$  pontban nem folytonos, akkor az  $x_0$  **szakadási pont**.

Osztályozásuk:

- ▶ megszüntethető szakadás
- ▶ ugrás (elsőfajú) szakadás
- ▶ szinguláris (másodfajú) szakadás

# Megszüntethető szakadás

Az  $x_0$  pontban **megszüntethető** a szakadás, ha az  $x_0$ -beli függvényérték módosításával (esetleg értelmezésével) folytonossá tehető a függvény.

Azaz  $x_0$ -ban létezik véges határérték, de az nem egyezik meg a függvényértékkel.

Példák:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 + 1, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Ha  $f(2) = 3$  helyett  $f(2) = 5$ , akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-2} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Ha 2-ben értelmezzük 1-nek a függvényt, akkor folytonos.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

Mivel  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$ , így ha 1-ben  $-1$ -nek értelmezzük, akkor folytonos.

# Ugrás szakadás

Az  $x_0$  pontban **ugrás** szakadás van, ha létezik és véges a jobb és bal oldali határérték, de nem egyezik meg:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$$

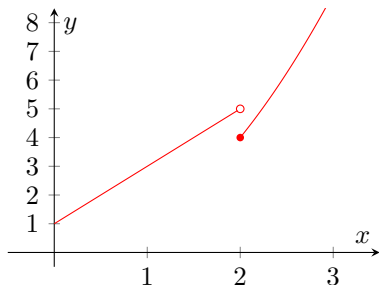
Példák:

Egészrész függvény egész helyeken.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ x^2, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$$

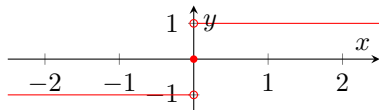
$$\lim_{x \rightarrow 2 -} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 -} (2x + 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2 +} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2 +} x^2 = 4$$



A szignum (előjel) függvény 0-ban:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



# Szinguláris szakadás

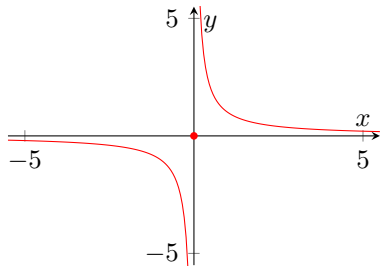
A szakadás **szinguláris**, ha legalább az egyik oldali határérték nem létezik vagy létezik, de végtelen.

Példák:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

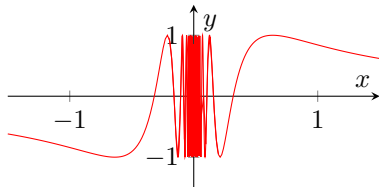
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -\infty$$



$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ekkor  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$  nem létezik.



# Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

## Tétel:

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény korlátos, azaz létezik  $k, K \in \mathbb{R}$ , hogy

$$k \leq f(x) \leq K \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$

Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl:  $f(x) = \frac{1}{x}$  a  $(0, 1]$  intervallumon nem korlátos.

## Weierstrass-tétel:

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan  $\alpha, \beta \in [a, b]$ , hogy

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$

A zárt intervallum itt is lényeges, pl: az  $f(x) = x$  függvényt csak a  $(0, 1)$  intervallumon értelmezve nincs megfelelő  $\alpha, \beta$  ( $0, 1 \notin (0, 1)$ ).

# Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények

## Bolzano-tétel:

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény az  $f(a)$  és  $f(b)$  között minden értéket felvesz, azaz ha  $f(a) \leq y \leq f(b)$  vagy  $f(b) \leq y \leq f(a)$ , akkor létezik olyan  $x \in [a, b]$ , hogy  $f(x) = y$ .

A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az  $\frac{1}{2}$  értéket.

## Bolzano és Weierstrass tételének következménye:

Korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz. Azaz:

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényhez van olyan  $\alpha, \beta \in [a, b]$ , hogy

- ▶ minden  $x \in [a, b]$ -re  $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ , és
- ▶  $f(\alpha) \leq y \leq f(\beta)$  esetén van olyan  $x \in [a, b]$ , hogy  $f(x) = y$ .