

8. előadás

Differenciálszámítás

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 7.

Bevezető mese: sebességmérés

Meg szeretnénk mérni a pillanatnyi sebességünket.

Ha csak az időt és a helyzetünket tudjuk mérni, akkor mit tehetünk?

Megmérjük, hogy egy rövid utat mennyi idő alatt teszünk meg, és e kettő hányadosa a sebességünk (pontosabban átlagsebességünk).

Minél rövidebb utat mérünk, annál pontosabban kapjuk meg a pillanatnyi sebességet.

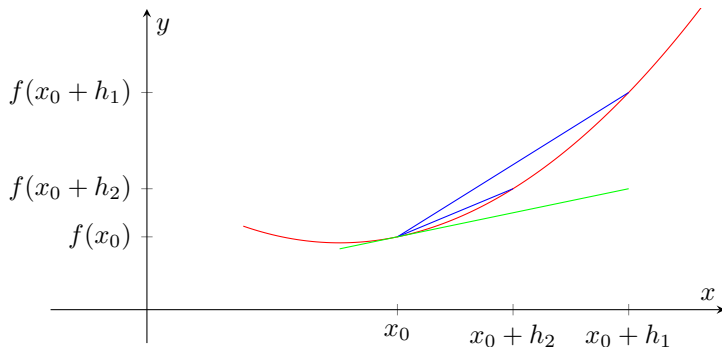
Differenciáhányados

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény x_0 -hoz tartozó differenciáhányadosa

$$F_{x_0}(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ahol $0 < |h| < \delta$.

Ez a szelők meredeksége.



Differenciálhányados

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény x_0 -hoz tartozó **differenciálhányadosa** (vagy **deriváltja**)

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_{x_0}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ vagy $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$, stb.

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f függvény **differenciálható/deriválható/diffható** az x_0 -ban.

Az f függvény differenciálható, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható.

Egy differenciálható f függvény **derivált függvénye**:

$$f': x_0 \mapsto f'(x_0).$$

Egy példa

Legyen $f(x) = x^2$ függvény.

Differenciáhányadosa az x_0 pontban:

$$\begin{aligned} F_{x_0}(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h. \end{aligned}$$

A differenciálhányadosa:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} F_{x_0}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Így az f függvény derivált függvénye az $x_0 \mapsto 2x_0$ függvény.

Ezt így is írhatjuk:

$$(x^2)' = 2x.$$

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény.

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény. Differenciáhányadosa az x_0 pontban:

$$\begin{aligned} F_{x_0}(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \\ &= \frac{\sin(x_0) \cos h + \cos(x_0) \sin h - \sin(x_0)}{h} = \\ &= \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0) \sin h}{h} \end{aligned}$$

A differenciálhányadosa:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} F_{x_0}(h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0) \sin h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{-2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x_0) \sin\left(\frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos(x_0) \frac{\sin h}{h} = \\ &= -\sin(x_0) \cdot 0 \cdot 1 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0). \end{aligned}$$

Tehát $(\sin x)' = \cos x$.

Néhány derivált

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Egyoldali deriváltak

Jobb oldali derivált x_0 -ban: $\lim_{h \rightarrow 0+} F_{x_0}(h)$.

Bal oldali derivált x_0 -ban: $\lim_{h \rightarrow 0-} F_{x_0}(h)$.

Példa: $f(x) = |x|$.

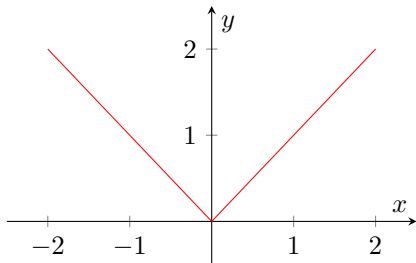
Differenciahányadosa $x_0 = 0$ -ban:

$$F_0(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h > 0 \\ -1, & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

Ennek $h = 0$ -ban nincs határértéke,
de van jobb és bal oldali határérték:

$$\lim_{h \rightarrow 0+} F_0(h) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} F_0(h) = -1$$



Kapcsolat a folytonossággal

Tétel

Ha egy függvény egy x_0 pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos a függvény.

Visszafelé nem igaz, pl. az abszolútérték-függvény a 0-ban.

Érintő

Az f függvény grafikonjának érintője az x_0 pontban az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő, $f'(x_0)$ meredekségű egyenes, melynek egyenlete:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Példa:

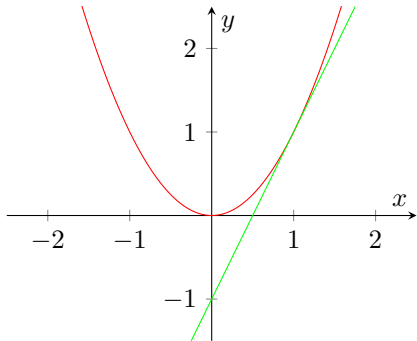
Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény érintőjét az $x_0 = 1$ pontban.

$f'(x) = 2x$, így $f'(1) = 2$.

Másrészt $f(1) = 1$, így

$$y = 1 + 2(x - 1) \text{ azaz}$$

$$y = 2x - 1$$



Feladat

Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

Feladat

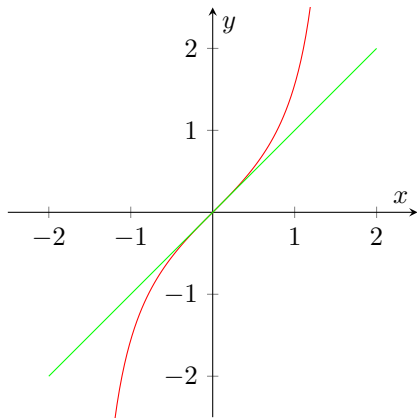
Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}, \text{ így } f'(0) = 1.$$

Másrészt $f(0) = 0$, így

$$y = 0 + 1(x - 0) \text{ azaz}$$

$$y = x.$$



Lineáris átfogalmazás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény az x_0 pontban differenciálható, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és egy $\varepsilon(x)$ függvény, melyre igaz, hogy

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

A derivált értéke ekkor az A szám.

Tehát a függvény:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{érintő}} + \underbrace{\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)}_{\text{hibatag}}.$$

