

Készülés az 1. zh-ra

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. október 14.

Feladatok

1. Adjuk meg a valós számoknak a lehető legbővebb részhalmazát, ahol az

$$f(x) = \frac{\arcsin(x-3)}{\ln(3x-9)} \text{ függvény értelmezhető!}$$

2. A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$

polinomnak? Határozzuk meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

3. Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!
4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 1} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

5. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } x = -1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és azok fajtáit.

1. feladat megoldása

Adjuk meg a valós számoknak a lehető legbővebb részhalmazát, ahol az

$$f(x) = \frac{\arcsin(x-3)}{\ln(3x-9)}$$
 függvény értelmezhető!

Az arcsin függvény csak a $[-1, 1]$ intervallumban van értelmezve, így

$$\begin{aligned} -1 &\leq x - 3 \leq 1 \\ 2 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Az $\ln$ függvény csak a pozitív számokon van értelmezve, így $3x - 9 > 0$, azaz $x > 3$.

A nevező nem lehet 0, így mivel $\ln(1) = 0$, a $3x - 9 \neq 1$, azaz $x \neq \frac{10}{3}$.

Tehát az értelmezés tartománya $(3; 4] \setminus \{\frac{10}{3}\}$.

2. feladat megoldása

A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = -3$ szám gyöke a

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 + cx - 6$$

polinomnak? Határozzuk meg ebben az esetben a polinom összes valós gyökét és írjuk fel a polinom gyöktényezős alakját.

Azt szeretnénk, hogy az $x_1 = -3$ -at behelyettesítve 0-t kapjunk:

$$0 = (-3)^4 + 3 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + c(-3) - 6 = 81 - 81 - 27 - 3c - 6 = -33 - 3c,$$

azaz $c = -11$. Az így kapott polinomnak az $x_1 = -3$ gyöke, ezt kiemelhetjük:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x + 3)(x^3 - 3x - 2).$$

Ekkor az $x^3 - 3x - 2$ polinom gyökeit kell meghatároznunk. Ennek lehetséges racionális gyökei a 2 osztói, azaz $\pm 1, \pm 2$. Behelyettesítéssel kapjuk, hogy a $+1$ nem gyök, de a -1 gyök. Így ezt is kiemelhetjük:

$$x^3 - 3x - 2 = (x + 1)(x^2 - x - 2).$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei (a megoldóképlettel): $-1, 2$.

Tehát a polinom valós gyökei: $-3, -1, 2$, ahol a -1 kétszeres gyök.

A gyöktényezős felbontás:

$$x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = (x + 3)(x + 1)^2(x - 2).$$

3. feladat megoldása

Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!

Az invertálhatósághoz az kell, hogy $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Esetünkben:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= f(x_2) \\3 + 2^{4x_1-1} &= 3 + 2^{4x_2-1} \\2^{4x_1-1} &= 2^{4x_2-1} && \text{mivel az exponenciális függvény injektív} \\4x_1 - 1 &= 4x_2 - 1 \\4x_1 &= 4x_2 \\x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Így a függvény injektív.

3. feladat megoldásának folytatása

Invertálható-e az $f(x) = 3 + 2^{4x-1}$ függvény? Ha igen, akkor adjuk meg az inverzét!

Az f függvény értékkészlete a $(3, +\infty)$ intervallum (2 hatványai pozitívok), így az inverzet is ezen az intervallumon értelmezzük. Az inverzet az $f(x) = y$ egyenlet átrendezésével kapjuk, azaz x -et kifejezzük ($y \in (3, +\infty)$):

$$f(x) = y$$

$$3 + 2^{4x-1} = y$$

$$2^{4x-1} = y - 3 \quad \text{mivel a } 2^x \text{ függvény inverze a kettes alapú logaritmus:}$$

$$4x - 1 = \log_2(y - 3)$$

$$4x = \log_2(y - 3) + 1$$

$$x = \frac{\log_2(y - 3) + 1}{4}$$

Tehát $f^{-1}(y) = \frac{\log_2(y-3)+1}{4}$, ami az x változóval felírva:

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_2(x - 3) + 1}{4} \quad x \in (3, +\infty).$$

4. feladat megoldása

Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 1} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Az első határérték:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = -\infty$$

A második határértéket nem a szokásos 0-ban, hanem végtelenben vesszük. A rendőrelvet és azt használjuk, hogy $-1 \leq \sin x \leq 1$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & \sin x & \leq & 1 \\ -1 & \leq & \sin x & \leq & 1 \\ \frac{x}{x} & \leq & \frac{\sin x}{x} & \leq & \frac{1}{x} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array} \quad \text{ha } x \rightarrow \infty$$

Tehát a rendőrelv szerint $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

5. feladat megoldása

Határozzuk meg az $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \\ \frac{3}{2}, & \text{ha } x = -1, \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ függvény

szakadási helyeit és azok fajtáit.

A függvény a ± 1 -en kívül folytonos, elegendő ezt a két helyet vizsgálni.

Az 1 pontban a határérték nem létezik, de van jobb és bal oldali határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = +\infty, \text{ mert } x^2 - 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = -\infty, \text{ mert } x^2 - 1 < 0$$

Az 1 így szinguláris szakadási hely.

A -1 -ben a tört számlálója is 0, így tudjuk egyszerűsíteni törtet $(x + 1)$ -gyel:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x - 1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2},$$

ami éppen a függvény értéke az 1-ben, tehát itt folytonos a függvény, ez nem szakadási pont.