

1. gyakorlat

Egyenletek és egyenlőtlenségek

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. szeptember 11.

1. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ egyenletet.

1. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$ egyenletet.

A gyökvonás miatt $4x + 13 \geq 0$, azaz $x \geq -\frac{13}{4}$.

Az egyenletet négyzetre emelve esetleg újabb gyököket kaphatunk:

$$(x + 2)^2 = 4x + 13$$

$$x^2 + 4x + 4 = 4x + 13$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy az $x = 3$ megoldás, az $x = -3$ nem megoldás.

1. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left| \frac{3x+2}{x-1} \right| = 3$ egyenletet.

1. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left| \frac{3x+2}{x-1} \right| = 3$ egyenletet.

Kikötjük, hogy $x-1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3 vagy $+3$. Tehát két eset van.

Az első:

$$\frac{3x+2}{x-1} = -3$$

$$3x+2 = -3(x-1)$$

$$3x+2 = -3x+3$$

$$6x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

A másik eset:

$$\frac{3x+2}{x-1} = 3$$

$$3x+2 = 3(x-1)$$

$$3x+2 = 3x-3$$

$$2 = -3,$$

ami ellentmondás, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Tehát az egyetlen megoldás az $x = \frac{1}{6}$ (ami nem 1).

2. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3$ egyenlőtlenséget.

2. feladat (a)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left| \frac{x}{2} + 2 \right| \leq 3$ egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám -3 és 3 között van:

$$-3 \leq \frac{x}{2} + 2 \leq 3$$

$$-5 \leq \frac{x}{2} \leq 1$$

$$-10 \leq x \leq 2$$

Tehát $x \in [-10, 2]$ a megoldás.

2. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $|5 - x| > 3$ egyenlőtlenséget.

2. feladat (b)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $|5 - x| > 3$ egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor nagyobb 3-nál, ha nagyobb 3-nál, vagy kisebb -3 -nál.

$$5 - x > 3$$

$$5 > 3 + x$$

$$2 > x$$

$$5 - x < -3$$

$$5 < -3 + x$$

$$8 < x$$

Tehát $x \in (-\infty, 2) \cup (8, +\infty)$ a megoldás.

2. feladat (c)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left|7 - \frac{x+3}{2}\right| \geq 5$ egyenlőtlenséget.

2. feladat (c)

Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en az $\left|7 - \frac{x+3}{2}\right| \geq 5$ egyenlőtlenséget.

Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legalább 5, ha legalább 5, vagy legfeljebb -5 .

$$7 - \frac{x+3}{2} \geq 5$$

$$14 - (x+3) \geq 10$$

$$11 - x \geq 10$$

$$1 \geq x$$

$$7 - \frac{x+3}{2} \leq -5$$

$$14 - (x+3) \leq -10$$

$$11 - x \leq -10$$

$$21 \leq x$$

Tehát $x \in (-\infty, 1] \cup [21, +\infty)$ a megoldás.

3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt.

3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt.

Teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1$$

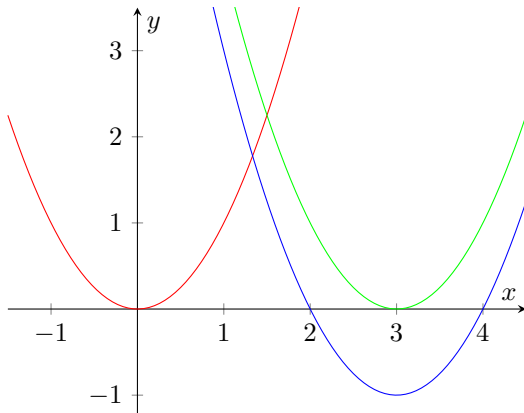
3. feladat

Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ függvényt.

Teljes négyzetté alakítunk:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 9 + 8 = (x - 3)^2 - 1$$

Tehát az $y = x^2$ grafikonját 3 egységgel jobbra, és 1 egységgel lefelé kell mozgatnunk.



4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az $A(0, 0)$, $B(0, 5)$ és $C(1, 3)$ csúcspontú háromszög belseje.

4. feladat

Írjunk fel olyan egyenlőtlenség-rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az $A(0,0)$, $B(0,5)$ és $C(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje.

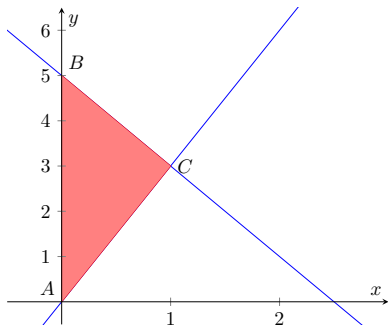
AB oldalegyenes egyenlete $x = 0$,
ettől jobbra levő pontok: $x > 0$.

AC oldalegyenes meredeksége
 $\frac{3}{1} = 3$, így az egyenlete $y = 3x + 0$
(átmegy az origón).

A háromszög belseje ezen egyenes
felett van, így a megfelelő
egyenlőtlenség: $y > 3x$.

BC oldalegyenes meredeksége
 $\frac{-2}{1} = -2$, így az egyenlete
 $y = -2x + 5$, mert az y -tengelyt az
5-nél metszi.

A háromszög belseje ezen egyenes
alatt van, így a megfelelő
egyenlőtlenség: $y < -2x + 5$.



A háromszög belsejét meghatározó
egyenlőtlenség-rendszer:

$$x > 0$$

$$y > 3x$$

$$y < -2x + 5$$

5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $A \subseteq C$, $A \neq C$, $B \subseteq C$, $B \neq C$, $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$.

5. feladat

Legyen

$$A = \{1, 2, 10\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $A \subseteq C$, $A \neq C$, $B \subseteq C$, $B \neq C$, $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$.

$A \subseteq C$ azt jelenti, hogy A minden eleme benne van a C halmazban.

Mivel $1^2, 2^2, 10^2$ mind legalább 1, így ez teljesül.

$A \neq C$ -hez elegendő egy olyan elemet mutatni, mely az egyikben benne van, de a másikban nincs. Ilyen például a 3, mely a C -ben benne van, de az A -ban nem.

$B \subseteq C$ -hez azt kell meggondolni, hogy ha $x > 1$, akkor $x^2 \geq 1$ is teljesül, ami nyilvánvaló.

$B \neq C$ igaz, mert $(-1) \in C$, de $(-1) \notin B$.

$A \not\subseteq B$, hiszen $1 \in A$, de $1 \notin B$.

$B \not\subseteq A$, mert $3 \in B$, de $3 \notin A$.

Opcionális feladat

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = ?$$

Házi feladatok

1. Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en a $x - 3 = \sqrt{x + 9}$ egyenletet.
2. Oldjuk meg $\mathbb{R}$ -en a $\left| \frac{1 - x}{3} - 5 \right| > 7$ egyenlőtlenséget.

Házi feladatok végeredménye

1. $x = 7$ ($x = 0$ hamis gyök)
2. $(-\infty, -35) \cup (7, +\infty)$