11. előadás

Lineáris transzformációk

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. március 24.

Lineáris leképezések

$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, ha

- $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén és
- $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $n = k$, akkor lineáris transzformációnak nevezzük.

Tétel:
$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezéshez létezik egy $k \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ekkor az $\mathbf{e}_1$ bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopa.
Hasonlóan az $\mathbf{e}_j$ bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopa.

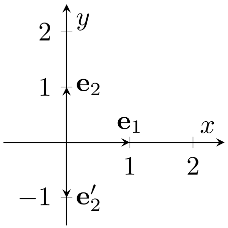
Kompozíció:
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineáris leképezések, és $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a megfelelő mátrixok, ekkor a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezéshez a $\mathbf{B}\mathbf{A}$ mátrix tartozik, mivel

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Transzformáció esetén a mátrix determinánsa azt határozza meg, hogy a transzformáció a térfogatot hányszorosára változtatja.

Síkon tükrözés

A síkon az x tengelyre tükrözünk.
Ekkor a bázisvektorok képe:



$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tehát a transzformáció mátrixa: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Valóban:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

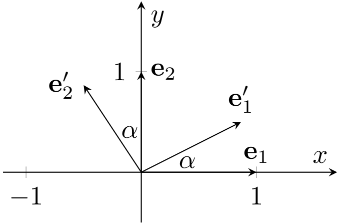
Forgatás síkban

A síkon α szöggel forgatunk.
Ekkor a bázisvektorok képe:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Tehát a forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



Forgatás térben

Ha a z tengely körül forgatunk:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Tehát a z tengely körüli forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Hasonlóan meggondolható, hogy

az x tengely körüli forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$

az y tengely körüli forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$

Síkra való vetítés

Írjuk fel a xy síkra való vetítés transzformációnak a mátrixát!

Síkra való vetítés

Írjuk fel a xy síkra való vetítés transzformációnak a mátrixát!

A bázisvektorok képei:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

így a vetítés mátrixa: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Úgy is gondolkodhatunk, hogy a xy síkra való vetítés a következő transzformáció:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix},$$

amiből adódik a fenti mátrix, mert

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$$

Egy pont képe

Mi a $P(1,2,3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk 60°-kal?

Egy pont képe

Mi a $P(1,2,3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk $60°$-kal?

A forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) & 0 \\ \sin(60°) & \cos(60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Így a P pont képe: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

És ha még az x tengely irányában kétszeresére nyújtunk is?

Egy pont képe

Mi a $P(1,2,3)$ pont képe, ha a z tengely körül forgatjuk $60°$-kal?

A forgatás mátrixa: $\begin{bmatrix} \cos(60°) & -\sin(60°) & 0 \\ \sin(60°) & \cos(60°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Így a P pont képe: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

És ha még az x tengely irányában kétszeresére nyújtunk is?

Az x tengely irányú nyújtás mátrixa: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, így:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Kompozíció

Tekintsük a z tengely körüli $60°$-os forgatás és az x tengely irányú kétszeres nyújtás kompozícióját. Mi az $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ képe?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tehát a kompozíció mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A mátrixok szorzásánál fordított a sorrend a transzformációk sorrendjéhez képest!

Feladat

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk 150°-kal. Mi a mátrixa ennek a transzformációnak? Mi a $P(4, 3, 2)$ pont képe?

Feladat

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk $150°$-kal. Mi a mátrixa ennek a transzformációnak? Mi a $P(4,3,2)$ pont képe?

Az yz síkra való tükrözés mátrixához tekintsük a bázisvektorok képeit:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

így az yz síkra való tükrözés mátrixa $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Az y tengely körüli $150°$-os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix}\cos(150°) & 0 & \sin(150°)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(150°) & 0 & \cos(150°)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

Feladat folytatása

Tükrözünk az yz síkra, majd az y tengely körül forgatunk $150°$-kal. Mi a mátrixa ennek a transzformációnak? Mi a $P(4,3,2)$ pont képe?

A kompozíció mátrixa az egyes transzformációk mátrixainak szorzata (fordított sorrendben):

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

A $P(4,3,2)$ pont képe:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+1 \\ 3 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Sajátértékek és sajátvektorok

$\mathcal{A}$ egy lineáris transzformáció, keresünk egy olyan (nem null)vektort, amit megnyújt: $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ valamilyen λ valós számra.
Ekkor λ a transzformáció sajátértéke és $\mathbf{v}$ a hozzá tartozó sajátvektor.

Példák:

- Egy tengely körüli forgatásnak a tengelye fix, így az irányvektora sajátvektor, melyhez tartozó sajátérték 1.
- Egy síkra való tükrözésnél a sík vektorai az 1 sajértékhez tartozó sajátvektorok, míg a normálvektor a -1 sajértékhez tartozó sajátvektor.
- Egy síkra való vetítésnél a sík vektorai az 1 sajértékhez tartozó sajátvektorok, míg a normálvektor a 0 sajértékhez tartozó sajátvektor.