12. előadás

Sajátértékek és sajátvektorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. március 25.

Lineáris leképezések ismétlés

$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, ha

- $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén és
- $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha $n = k$, akkor lineáris transzformációnak nevezzük.

Tétel:
$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezéshez létezik egy $k \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ekkor az $\mathbf{e}_1$ bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_1$, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopa.
Hasonlóan az $\mathbf{e}_j$ bázisvektor képe $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$, azaz az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopa.

Kompozíció:
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineáris leképezések, és $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ a megfelelő mátrixok, ekkor a $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ leképezéshez a $\mathbf{B}\mathbf{A}$ mátrix tartozik, mivel

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Transzformáció esetén a mátrix determinánsának abszolút értéke azt határozza meg, hogy a transzformáció a térfogatot hányszorosára változtatja.

Sajátértékek és sajátvektorok

$\mathcal{A}$ egy lineáris transzformáció, keresünk egy olyan (nem null)vektort, amit megnyújt: $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ valamilyen λ valós számra.
Ekkor λ a transzformáció sajátértéke és $\mathbf{v}$ a hozzá tartozó sajátvektor.

Ugyanez a megfelő mátrixra:
$\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix és $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ n dimenziós oszlopvektor, melyekre: $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ számra.

$$\begin{aligned} \mathbf{Av} &= \lambda\mathbf{v} \\ \mathbf{Av} - \lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Av} - \lambda\mathbf{E}_n\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n)\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ez $\mathbf{v}$-re egy homogén lineáris egyenletrendszer.
Ennek pontosan akkor van $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ megoldása, ha $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_n)$ egyenlő nullával.
Ez egy n-edfokú polinom λ-ban, melyet karakterisztikus polinomnak nevezünk.
A sajátértékek megkereséshez ennek a polinomnak kell megkeresni a gyökeit.

Példa

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai.

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \lambda\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_3) &= (1-\lambda)^2(-\lambda) + 2 + (-1) - 2(1-\lambda) - \lambda - (1-\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2 - 1 - 2 + 2\lambda - \lambda - 1 + \lambda = \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = \\ &= (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 + \lambda + 2\right) \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ gyök. A $-\lambda^2 + \lambda + 2$ másodfokú polinom gyökei:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$.

Sajátvektor számítása – első

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektor az $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. Ez $\lambda_1 = 1$ esetén:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 + s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Ekkor x_3 szabad paraméter, és $x_1 = x_3$ és $x_2 = x_3$.

A megoldás: $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, míg a $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$.

Sajátvektor számítása – második

$\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 \leftrightarrow s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - 2s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2/(-5) \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 + 5s_2 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 - 2s_2 \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Ebben az esetben is az x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = -\frac{1}{5}x_3$ és $x_2 = \frac{3}{5}x_3$, így a megoldások: $\begin{bmatrix} -\frac{1}{5}x_3 \\ \frac{3}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, míg a sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ 3x \\ 5x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$.

Sajátvektor számítása – harmadik

$\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1/(-1) \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 - s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2/(-2) \\ \sim \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_3 + 3s_2 \\ \sim \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 - s_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Itt is az x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$ és $x_2 = 0$, így a megoldások:
$\begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$, míg a sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$.

Összefoglalás

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$.

Ezekhez tartozó sajátvektorok:

$\lambda_1 = 1 \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$, pl.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, melyre $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \left\{ \begin{bmatrix} -x \\ 3x \\ 5x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$, pl.: $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, melyre $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 2 \quad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$, pl.: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, melyre $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Feladat

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és mindegyikhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.

Feladat

Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és mindegyikhez adjunk meg egy-egy sajátvektort.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_3) &= \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 4 \\ -1 & 2-\lambda & 3 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda) - 3 - 4 + 4(2-\lambda) + (3-\lambda) + 3\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda - 7 + 8 - 4\lambda + 3 - \lambda + 3\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

A racionális gyökök a 4 osztói között vannak: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Az 1 gyök, így azt kiemelhetjük:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

Két sajátérték van: 1 és 2, utóbbi kétszeres.

Feladat folytatása: első sajátérték

$\lambda_1 = 1$ sajátérték:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{s_1/(-1)} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 + s_1 \\ \sim \\ s_3 + s_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{s_2/(-1)} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_1 + 4s_2 \\ \sim \\ s_3 + 2s_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az x_2 a szabad paraméter, $x_1 = x_2$ és $x_3 = 0$, így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$. Egy sajátvektor például az $(1, 1, 0)$ vektor.

Feladat folytatása: második sajátérték

$\lambda_2 = 2$ sajátérték:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{s_1/(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} s_2 + 2s_1 \\ \sim \\ s_3 + s_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{s_3 - s_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az x_3 a szabad paraméter, $x_1 = 3x_3$ és $x_2 = 2x_3$, így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$. Egy sajátvektor például a $(3, 2, 1)$ vektor.

Egy másik példa

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei és az egyikhez a sajátvektorok.

Egy másik példa

Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei és az egyikhez a sajátvektorok.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 4\right) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right)$$

A $\lambda_1 = 1$ gyök, a másik kettő a másodfokú megoldóképlettel:

$$\lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Tehát a sajátértékek: $1, 1+2i, 1-2i$.

$\lambda_1 = 1$-hez számolhatunk sajátvektort (többihez is lehetne, de nehezebb):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2 - 3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 szabad paraméter: $x_1 = x_3$ és $x_2 = -\frac{3}{2}x_3$, a sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ -3x \\ 2x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$