14. előadás

Totális derivált

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. április 1.

Eddigi többváltozós deriváltak

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjai:

- parciális derivált
- gradiens
- iránymenti derivált

Totális derivált

Emlékeztető:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható x_0-ban, akkor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban totálisan differenciálható, ha létezik $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix és $\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{és} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = \mathbf{0}.$$

Jelölés az $\mathbf{A}$ mátrixra: $f'(\mathbf{x}_0)$ vagy $\partial f(\mathbf{x}_0)$ vagy $Df(\mathbf{x}_0)$, stb.

A totális deriválhatóságnak szükséges feltétele, hogy a függvény komponens függvényei parciálisan deriválhatóak minden változó szerint az $\mathbf{x}_0$ helyen.
Az $\mathbf{A}$ mátrix a komponens függvények parciális deriváltjaiból áll (Jacobi-mátrix):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Totális deriválhatóság elégséges feltétele

Tétel:
Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény komponens függvényeinek parciális deriváltjai az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pont környezetében léteznek, és ezek folytonosak az $\mathbf{x}_0$-ban, akkor az f függvény az $\mathbf{x}_0$-ban totálisan deriválható.

Jacobi-mátrix – példa

Számítsuk ki az $f(x, y, z) = (x^2 y, xe^{yz}, x\ln(y))$ függvény Jacobi-mátrixát a $(3, 1, 0)$ pontban.

Jacobi-mátrix – példa

Számítsuk ki az $f(x,y,z) = (x^2y, xe^{yz}, x\ln(y))$ függvény Jacobi-mátrixát a $(3,1,0)$ pontban.

$$\begin{array}{lll}
f_1(x,y,z) = x^2y & f_2(x,y,z) = xe^{yz} & f_3(x,y,z) = x\ln(y) \\
f'_{1x}(x,y,z) = 2xy & f'_{2x}(x,y,z) = e^{yz} & f'_{3x}(x,y,z) = \ln(y) \\
f'_{1y}(x,y,z) = x^2 & f'_{2y}(x,y,z) = xe^{yz}z & f'_{3y}(x,y,z) = \dfrac{x}{y} \\
f'_{1z}(x,y,z) = 0 & f'_{2z}(x,y,z) = xe^{yz}y & f'_{3z}(x,y,z) = 0
\end{array}$$

A parciális deriváltak értékei a $(3,1,0)$ pontban:

$$\begin{array}{lll}
f'_{1x}(3,1,0) = 6 & f'_{2x}(3,1,0) = 1 & f'_{3x}(3,1,0) = 0 \\
f'_{1y}(3,1,0) = 9 & f'_{2y}(3,1,0) = 0 & f'_{3y}(3,1,0) = 3 \\
f'_{1z}(3,1,0) = 0 & f'_{2z}(3,1,0) = 3 & f'_{3z}(3,1,0) = 0
\end{array}$$

Így a Jacobi-mátrix a $(3,1,0)$ pontban:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Iránymenti deriváltról szóló tétel

Tétel:
Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény totálisan deriválható a P_0 pontban, akkor ott az iránymenti deriváltját kiszámolhatjuk a következő skaláris szorzat segítségével:

$$f'_{\mathbf{e}}(P_0) = \mathrm{grad} f(P_0) \cdot \mathbf{e}$$

Láncszabály

Emlékeztető:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

$g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
g differenciálható $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^k$-ban és
f differenciálható $g(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$-ben,
akkor $f \circ g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható $\mathbf{x}_0$-ban, és

$$(f \circ g)'(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \cdot g'(\mathbf{x}_0).$$

típusok: $\quad m \times k \qquad m \times n \quad n \times k$

Speciális eset: $k = 1, n = 2, m = 1$
$g(t) = (x(t), y(t))$ és $f(x, y)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(t) &= f(x(t), y(t)) \\ (f \circ g)'(t) &= \left[f'_x(x(t), y(t))\ f'_y(x(t), y(t))\right] \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \\ &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t)\end{aligned}$$

Láncszabály – példa

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $g(t) = (\cos t, \sin t)$.
Számítsuk ki az $(f \circ g)(t)$ függvény deriváltját.

Láncszabály – példa

Legyen $f(x,y) = x^2 + y^2$ és $g(t) = (\cos t, \sin t)$.
Számítsuk ki az $(f \circ g)(t)$ függvény deriváltját.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \qquad & x(t) &= \cos t \qquad & y(t) &= \sin t \\ f'_x(x,y) &= 2x & x'(t) &= -\sin t & y'(t) &= \cos t \\ f'_y(x,y) &= 2y & & & & \end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) &= f'_x(x(t), y(t))x'(t) + f'_y(x(t), y(t))y'(t) = \\ &= 2\cos t \cdot (-\sin t) + 2\sin t \cdot \cos t = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ami nem meglepő, mert

$$(f \circ g)(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$