

16. előadás

Mátrixok diagonalizálása

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. április 28.

Diagonalizálhatóság

Egy mátrix **diagonális**, ha a főátlón kívül minden eleme 0.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix **diagonalizálható**, ha található hozzá olyan $\mathbf{C}$ invertálható négyzetes mátrix, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális.

Ez a sajátvektorok bázisában a megfelelő transzformáció mátrixa.

Tétel:

Az $\mathbf{A}$ $n \times n$ -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n darab lineárisan független sajátvektora.

Ekkor $\mathbf{C}$ oszlopai a sajátvektorok, míg a diagonális mátrix főátlójában a sajátértékek állnak.

Először egy feladat

Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Először egy feladat

Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) &= \begin{vmatrix} 5 - \lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4 - \lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (5 - \lambda)(4 - \lambda)(-4 - \lambda) + (-6) \cdot 2 \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) \cdot (-6) - \\ &\quad - (-6) \cdot (4 - \lambda) \cdot 3 - (-6) \cdot (-1) \cdot (-4 - \lambda) - (5 - \lambda) \cdot 2 \cdot (-6) = \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 16\lambda - 80 - 36 - 36 + 72 - 18\lambda + 24 + 6\lambda + 60 - 12\lambda = \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = (\lambda - 1)(-(\lambda - 2)^2) \end{aligned}$$

Tehát a sajátértékek: 1, 2, 2.

Az első sajátvektor

Sajátvektor $\lambda_1 = 1$ -hez:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array} \right] s_1 - s_3 &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & 0 \end{array} \right] s_2 + s_1 &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right] s_3 - 3s_1 \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right] s_3 + 6s_2 &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Az x_3 szabad paraméter, $x_1 = x_3$, és $x_2 = -\frac{1}{3}x_3$.

A sajátvektorok halmaza: $\left\{ \left[\begin{array}{c} x \\ -\frac{1}{3}x \\ x \end{array} \right] \middle| x \neq 0 \right\}$.

Egy sajátvektor: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

A második sajátvektor

$\lambda_2 = 2$ -höz sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 + s_1, s_3 - 3s_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Az x_2 és x_3 szabad paraméter, és $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$, azaz $x_1 = 2x_2 + 2x_3$,

és így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \left[\begin{array}{c} 2x_2 + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \mid x_2, x_3 \text{ nem mindkettő } 0 \right\}$

$\lambda_2 = 2$ -höz két (lineárisan független) sajátvektor: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Összefoglalás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

sajátértékei: 1, 2, 2

$$\lambda_1 = 1\text{-hez sajátvektor: } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 2\text{-höz két (lineárisan független) sajátvektor: } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az inverzét!

Az inverz mátrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determináns kiszámolása:

$$\det \mathbf{C} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 = -1$$

2. Aldeterminánsok kiszámolása:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

3. A kapott mátrixot transzponáljuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

5. Végül leosztjuk a determinánssal:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Diagonalizálás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} =$$

Diagonalizálás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} \text{ első oszlopa: } \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} \text{ második oszlopa: } \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{C} \text{ harmadik oszlopa: } \mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \lambda_2\mathbf{v}_3 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{C}) \text{ első oszlopa} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3 \text{ első oszlopa,}$$

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{C}) \text{ második oszlopa} = \text{kétszer } \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3 \text{ második oszlopa,}$$

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{C}) \text{ harmadik oszlopa} = \text{kétszer } \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{E}_3 \text{ harmadik oszlopa.}$$

Diagonalizálás általában

Ha az $\mathbf{A}$ $n \times n$ -es mátrixnak a sajátértékei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, és ezekhez van n darab lineárisan független sajátvektor: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, akkor legyen

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$$

Sajátvektorok lineárisan függetlenek, így a $\mathbf{C}$ mátrixnak létezik a $\mathbf{C}^{-1}$ inverze. Ekkor

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^{-1}$$

Mátrixok hatványozása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^5 = ?$$

Mátrixok hatványozása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^5 = ?$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}$, így

$$\mathbf{A}^5 = (\mathbf{CDC}^{-1})^5 = \mathbf{CDC}^{-1}\mathbf{CDC}^{-1}\dots\mathbf{CDC}^{-1} = \mathbf{CD}^5\mathbf{C}^{-1}$$

Másrészt

$$\mathbf{D}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

Ezzel:

$$\mathbf{A}^5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & -186 & -186 \\ -31 & 94 & 62 \\ 93 & -186 & -154 \end{bmatrix}$$