

17. előadás

Feltételes szélsőérték

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. május 6.

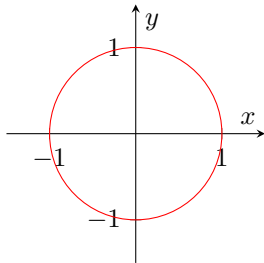
Bevezető feladat

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 1$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 = 1$ feltétel mellett.

Ha $x^2 + y^2 = 1$, akkor a függvény:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 1 = 2y$$

Az $x^2 + y^2 = 1$ feltételből az is következik, hogy $-1 \leq y \leq 1$, így
a függvény minimuma -2 ,
a függvény maximuma 2 .



Feltételes szélsőérték:

Egy többváltozós $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit keressük egy $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ függvény nullhelyein.

A továbbiakban csak az $n = 2, k = 1$ esettel foglalkozunk.

Lagrange-függvény

Az $f(x, y)$ függvény lokális szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett. Ekkor tekintsük az

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Lagrange-függvényt, ahol λ a **Lagrange-multiplikátor**.

Tétel (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele):

Tegyük fel, hogy az $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a g függvény parciális deriváltjai nem mind 0-ák.

Ha az f függvénynek az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban lokális szélsőértéke van a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor a megfelelő pontban az $F(x, y, \lambda)$ függvény mindhárom parciális deriváltja 0.

Megjegyzés:

$F'_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$ eltűnése pontosan a feltétel.

Elégséges feltétel

Tétel (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele):

Tegyük fel, hogy az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá a $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai léteznek.

Ha egy (x_0, y_0, λ_0) hármásra

$$F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = F'_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \quad (\text{stacionárius pont})$$

és

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{x\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{y\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ F''_{\lambda x}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda y}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{\lambda\lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_x(x_0, y_0) \\ F''_{yx}(x_0, y_0, \lambda_0) & F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0) & g'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2F''_{xy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)g'_y(x_0, y_0) - F''_{yy}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_x(x_0, y_0)^2 - \\ &\quad - F''_{xx}(x_0, y_0, \lambda_0)g'_y(x_0, y_0)^2 \end{aligned}$$

- ▶ pozitív, akkor lokális maximuma van
- ▶ negatív, akkor lokális minimuma van

az (x_0, y_0) pontban az $f(x, y)$ függvénynek a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = 6x + 8y - 10$ függvény feltételes szélsőértékeit az $x^2 + y^2 = 25$ feltétel mellett.

A $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ függvénnyel a Lagrange-függvény:

$$F(x, y, \lambda) = 6x + 8y - 10 + \lambda (x^2 + y^2 - 25)$$

A parciális deriváltjai:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 6 + \lambda \cdot 2x = 6 + 2\lambda x \quad \Rightarrow x = -\frac{6}{2\lambda} = -\frac{3}{\lambda}$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 8 + \lambda \cdot 2y = 8 + 2\lambda y \quad \Rightarrow y = -\frac{8}{2\lambda} = -\frac{4}{\lambda}$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve:

$$\left(-\frac{3}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 = 25$$

$$\frac{25}{\lambda^2} = 25$$

$$\lambda = \pm 1$$

Így $x = \mp 3$, és $y = \mp 4$. Tehát a stacionárius pontok: $(-3, -4, 1)$ és $(3, 4, -1)$. A feltétel parciális deriváltjai ($g'_x(x, y) = 2x$ és $g'_y(x, y) = 2y$) csak az origóban tűnnek el egyszerre, de ott nem teljesül a feltétel.

Példa folytatása

A másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{array}{ll} F'_x(x, y, \lambda) = 6 + 2\lambda x & F''_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ F'_y(x, y, \lambda) = 8 + 2\lambda y & F''_{xy}(x, y, \lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 25 & \Rightarrow F''_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda \\ & F''_{\lambda x}(x, y, \lambda) = 2x \\ & F''_{\lambda y}(x, y, \lambda) = 2y \end{array}$$

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda,$$

ami a $(-3, -4, 1)$ pontban negatív, így itt lokális minimum van,
míg a $(3, 4, -1)$ pontban pozitív, így itt lokális maximum van.

Az adott feltétel mellett a függvény

(lokális) minimuma: $f(-3, -4) = -60$,

(lokális) maximuma: $f(3, 4) = 40$.

Szélsőérték keresése korlátos és zárt tartományon

Az $f(x, y)$ függvény (abszolút) minimumát és maximumát keressük a $\{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$ korlátos tartományon.

Először megkeressük az f függvény lokális szélsőértékeit, melyek közül csak a tartományba esőket vesszük figyelembe.

Majd az f függvény szélsőértékeit megkeressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett a Lagrange-függvénnyel.

A kapott eredményekből megállapítjuk az abszolút minimumot és maximumot.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységekörlepton $(\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\})$.

Példa

Keressük meg az $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ függvény szélsőértékeit az egységlapra $(\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\})$.

Először lokális szélsőértékeket keresünk. Ehhez a parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2x - 1$$

$$f'_y(x, y) = 2y$$

Egyetlen stacionárius pont van: $(\frac{1}{2}, 0)$, mely a megadott tartományba esik.
A másodrendű parciális deriváltak:

$$f''_{xx}(x, y) = 2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = 2$$

A Hesse-determináns: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$, tehát az $(\frac{1}{2}, 0)$ lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum $(2 > 0)$.

A lokális minimum értéke: $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$.

Példa folytatása

$$f(x, y) = x^2 - x + y^2$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - x + y^2 + \lambda (x^2 + y^2 - 1)$$

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 2x - 1 + \lambda 2x$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda 2y$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1$$

Ha $F'_y(x, y, \lambda)$ eltűnik, akkor $y = 0$ vagy $\lambda = -1$, viszont az utóbbi esetben $F'_x(x, y, \lambda) = -1$. Tehát $y = 0$ és a harmadik egyenletből $x = \pm 1$. A stacionárius pontok: $(1, 0, -\frac{1}{2})$, $(-1, 0, -\frac{3}{2})$. A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -(2x)^2(2+2\lambda) - (2y)^2(2+2\lambda) = -8(1+\lambda)(x^2+y^2)$$

A $(1, 0, -\frac{1}{2})$ lokális minimumhely, értéke: $f(1, 0) = 0$.

A $(-1, 0, -\frac{3}{2})$ lokális maximumhely, értéke: $f(-1, 0) = 2$.

A függvény abszolút minimuma $-\frac{1}{4}$, míg abszolút maximuma 2.

Feladat

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

Feladat

Keressük meg az $f(x, y) = x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 3x^2y^5$$

$$f'_y(x, y) = 5x^3y^4$$

Ha x vagy y nulla, akkor mindkettő eltűnik (másutt nem), tehát a két tengely összes pontja stacionárius pont.

Számoljuk ki a másodrendű parciális deriváltakat:

$$f''_{xx}(x, y) = 6xy^5$$

$$f''_{xy}(x, y) = 15x^2y^4$$

$$f''_{yy}(x, y) = 20x^3y^3$$

A Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 6xy^5 \cdot 20x^3y^3 - (15x^2y^4)^2 = -105x^4y^8,$$

mely az összes stacionárius pontban nulla.

A függvény az első és harmadik síknegyedben pozitív, a második és negyedik síknegyedben negatív, így nincs lokális szélsőértéke.

Feladat második kérdése

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

Keressük meg f minimumát és maximumát az $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ csúcsú háromszöglapon.

Feladat második kérdése

Keressük meg az $f(x, y) = x^3 y^5$ függvény lokális szélsőértékeit.

Keressük meg f minimumát és maximumát az $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ csúcsú háromszöglapon.

Mivel a függvénynek nincs lokális szélsőértéke, így a minimum és a maximum a határon lesz. A tengelyeken a függvény nulla, a háromszöglapon másutt pozitív, így a minimuma 0. A maximuma a $(0, 1)$ és $(1, 0)$ közötti szakaszon lesz. Ezt paraméterezhetjük $\{(x, 1 - x) \mid x \in [0, 1]\}$ alakban, és ekkor a függvény:

$$g(x) = f(x, 1 - x) = x^3(1 - x)^5,$$

melynek maximuma $g'(x) = 0$ esetén lehet. A deriváltja:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2(1 - x)^5 + x^3 5(1 - x)^4(-1) = 3x^2(1 - x)^5 - 5x^3(1 - x)^4 = \\ &= (3(1 - x) - 5x)x^2(1 - x)^4 = (3 - 8x)x^2(1 - x)^4, \end{aligned}$$

mely $x = \frac{3}{8}$ esetén tűnik el (a széleken kívül). Ez lokális maximum, mert előtte pozitív, utána negatív a $g'(x)$. Az ennek megfelelő $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ pontban van az f függvény maximuma, melynek értéke: $f(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}) = \frac{3^3 \cdot 5^5}{8^8} = \frac{84375}{16777216} \approx 0,00503$.

A háromszöglapon a függvény minimuma 0, maximuma kb. 0,00503.

A feladat második kérdése Lagrange-módszerrel

Az $f(x, y) = x^3y^5$ függvény lokális szélsőértékét keressük a $(0, 1)$ és $(1, 0)$ közötti szakaszon, azaz a $g(x, y) = x + y - 1$ függvény nullhelyén:

$$F(x, y, \lambda) = x^3y^5 + \lambda(x + y - 1)$$

A parciális deriváltak:

$$F'_x(x, y, \lambda) = 3x^2y^5 + \lambda$$

$$F'_y(x, y, \lambda) = 5x^3y^4 + \lambda$$

$$F'_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1$$

Az első két derivált eltűnéséből:

$$3x^2y^5 = 5x^3y^4$$

$$3x^2(1-x)^5 = 5x^3(1-x)^4$$

$$3(1-x) = 5x$$

$$x = \frac{3}{8}$$

A feltételből : $y = 1 - x$.

Tehát a $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{84375}{2097152})$ stacionárius pont.

A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 6xy^5 & 15x^2y^4 & 1 \\ 15x^2y^4 & 20x^3y^3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 15x^2y^4 + 15x^2y^4 - 20x^3y^3 - 6xy^5 = (30xy - 20x^2 - 6y^2)xy^3,$$

ami a stacionárius pontban pozitív, így ez feltételes lokális maximum.