

18. előadás

Numerikus sorozatok és sorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. május 12.

Sorozat definíciója

Minden természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Megadhatjuk rekurzívan, pl.:

$$a_{n+1} = a_n + 5$$

számtani sorozat

$$a_{n+1} = 5a_n$$

mértani sorozat

Vagy expliciten formulával, pl.:

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Általában a végtelenbeli határérték érdekes, tulajdonképpen a „végtelen megközelítése”.

Tulajdonságok

A függvényekhez hasonlóan:

A sorozat

monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$

szigorúan monoton nő, ha $n < m$ esetén $a_n < a_m$

monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n \geq a_m$

szigorúan monoton csökken, ha $n < m$ esetén $a_n > a_m$

alulról korlátos, ha létezik $k \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq k$

felülről korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$

korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n| \leq K$

legnagyobb alsó korlát $\inf a_n$

legkisebb felső korlát $\sup a_n$

Sorozatok határértéke

Csak a $+\infty$ -ben vizsgáljuk!

Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $a_n \rightarrow A$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n > K$.

Jelölés: $a_n \rightarrow +\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Az a_n sorozat határértéke a $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén $a_n < K$.

Jelölés: $a_n \rightarrow -\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Egy sorozat **konvergens**, ha létezik $A \in \mathbb{R}$ határértéke.

Egy sorozat **divergens**, ha nem konvergens.

Ha egy sorozat határértéke 0, akkor **nullsorozat**.

Műveletek és a határérték

Tétel:

Ha $a_n \rightarrow A$, $b_n \rightarrow B$, akkor

$$a_n + b_n \rightarrow A + B$$

$$a_n - b_n \rightarrow A - B$$

$$a_n b_n \rightarrow AB$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{A}{B}, \quad \text{ha } b_n, B \neq 0$$

$$ca_n \rightarrow cA, \quad \text{ha } c \in \mathbb{R}$$

Nevezetes sorozatok

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^a} \rightarrow 0, \text{ ha } a > 0$$

$$n^a \rightarrow +\infty, \text{ ha } a > 0$$

$$q^n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1 \\ 0, & \text{ha } |q| < 1 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{q} \rightarrow 1, \text{ ha } q > 0$$

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e}$$

$$\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \rightarrow e^q, \text{ ahol } q \in \mathbb{R}$$

Rendőrelv

Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ (ha $n \geq N$) és $a_n \rightarrow A$ és $c_n \rightarrow A$, akkor $b_n \rightarrow A$.

Példa:

$$b_n = \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{2} & \leq & \sqrt[n]{2 + \frac{1}{n}} & \leq & \sqrt[n]{3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{ha } n \rightarrow \infty \\ 1 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 1 \end{array}$$

Feladat

Mi a $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

Feladat

Mi a $\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n}$ sorozat határértéke?

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^3}{e^{-1}}\right)^2 = (e^4)^2 = e^8$$

Egy másik megoldási módszer:

$$\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{2n} = \left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{4}{n-1}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{2n}{n-1}} \rightarrow (e^4)^2 = e^8,$$

mert

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

Akhilleusz és a teknős

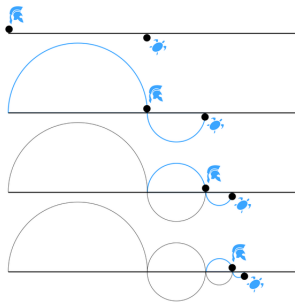
Zénón paradoxonja:

Akhilleusz és a teknős

A gyorslábú Akhilleusz versenyt fut a lomha teknőssel, akinek egy kis előnyt ad. Zénón érvelése szerint így soha nem fogja utólréni, mert míg odaér ahonnan a teknős indult, a teknős már haladt valamit. De mire odaér, már megint nem lesz ott a teknős...

A kép a Wikipédiáról származik:

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Zeno_Achilles_Paradox.png



Szumma ismétlése

$$\sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

Példa:

$$\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

Sor

Ha a_n egy sorozat, akkor a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ formális összeget

numerikus sornak nevezzük.

Az N -edik részletösszeg:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort akkor nevezzük konvergensnek, ha a részletösszegek $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ sorozata konvergens. Ennek határértéke a sor összege:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Példa

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sor részletösszegei:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

A sor összege ennek a határértéke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

Geometriai sor

Tudjuk, hogy

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = 1-x^{n+1} \quad \Rightarrow \quad 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Így a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^N,$$

melynek határértéke 2, ennyi a sor összege.

Általában $|q| < 1$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ sor részletösszegei:

$$S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

melynek határértéke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$ -re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$ -re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

Feladatok

Tudjuk, hogy $|q| < 1$ -re

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \sum_{n=1}^{\infty} aq^n = \frac{aq}{1-q}$$

Mennyi a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n}$ sor összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{5}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{5}{6}} = 6$$

Mennyi a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}}$ sor összege?

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 5^n}{3^{2n}/3} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{5^n}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 60 \left(\frac{5}{9}\right)^n = \\ &= \frac{60 \cdot \frac{5}{9}}{1 - \frac{5}{9}} = 60 \cdot \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9}} = 60 \cdot \frac{5}{4} = 75 \end{aligned}$$

Akhilleuszra visszatérve

Tegyük fel, hogy a gyorslábú Akhilleusz sebessége 20 km/h, míg a lomha teknőse 1 km/h, de 1 km előnnyel indul.

A pozíciójuk az idő függvényében:

idő	Akhilleusz	teknős
0	0	1
$\frac{1}{20}$	1	$1 + \frac{1}{20}$
$\frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2$	$1 + \frac{1}{20}$	$1 + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2$
$\frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^3$	$1 + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2$	$1 + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^3$

Így a találkozási hely:

$$1 + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{20}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{20}} = \frac{20}{19}$$

Neumann feladata

Két kerékpáros egymástól 20 km-re egymás felé elindul 10 km/h-s sebességgel. Mikor indulnak, egy légy 15 km/h sebességgel elindul az egyik kerékpárról a másik felé, majd amikor azt eléri, vissza az elsőhöz, és így tovább egészen addig, amíg a két kerékpár találkozik. Mekkora utat tesz meg a légy?

Neumann feladata

Két kerékpáros egymástól 20 km-re egymás felé elindul 10 km/h-s sebességgel. Mikor indulnak, egy légy 15 km/h sebességgel elindul az egyik kerékpárról a másik felé, majd amikor azt eléri, vissza az elsőhöz, és így tovább egészen addig, amíg a két kerékpár találkozik. Mekkora utat tesz meg a légy?

fordulás	1. kerékpár	2. kerékpár	megtett út (légy)
0.	0	20	0
1.	8	12	12
2.	9,6	10,4	12 + 2,4
3.	9,92	10,08	12 + 2,4 + 0,48

A légy által megtett út:

$$12 + 2,4 + 0,48 + \dots = 12 + \frac{12}{5} + \frac{12}{5^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 12 \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{12}{1 - \frac{1}{5}} = 15$$

Erre az eredményre jutunk, ha rájövünk, hogy a kerékpárosok egy óra múlva találkoznak, ami alatt a légy 15 km-t repül.